

582

בגרויות מתמטיקה - פתרונות מלאים - חלק שני

- מבנה מבחן הבגרות 1 _____
- 1 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד א _____ 2
- 2 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד ב _____ 8
- 3 - חורף תש"ע - 2010 _____ 16
- 4 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א _____ 22
- 5 - קיץ תש"ע - 20 - מועד ב _____ 29
- 6 - קיץ תש"ע - 2010 - המבחן הגנוז _____ 36
- 7 - חורף תשע"א - 2011 _____ 43
- 8 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א _____ 51
- 9 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד ב _____ 59
- 10 - חורף תשע"ב - 2012 _____ 66
- 11 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד א _____ 74
- 12 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד ב _____ 81
- 13 - חורף תשע"ג - 2013 _____ 89
- 14 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד א _____ 97
- 15 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד ב _____ 106
- 16 - חורף תשע"ד - 2014 _____ 114
- 17 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א _____ 122
- 18 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ב _____ 128
- 19 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ג _____ 135
- 20 - סתו תשע"ה - 2014 - מועד ד _____ 142
- 21 - חורף תשע"ה - 2015 _____ 149
- 22 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א _____ 156
- 23 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב _____ 164
- 24 - חורף תשע"ו - 2016 _____ 172
- 25 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד א _____ 181
- 26 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב _____ 189
- 27 - חורף תשע"ז - 2017 _____ 197
- 28 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א _____ 205
- 29 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד ב _____ 214
- 30 - חורף תשע"ח - 2018 _____ 222
- 31 - קיץ תשע"ח - 2018 - מועד א _____ 230
- 32 - קיץ תשע"ח - 2018 - מועד ב _____ 238
- 33 - חורף תשע"ט - 2019 _____ 246
- 34 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד א _____ 255
- 35 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב _____ 264
- דוגמאות - משרד החינוך _____ 272
- 36 - חורף תש"פ - 2020 _____ 287
- 37 - קיץ תש"פ - 2020 - מועד א _____ 295
- 38 - קיץ תש"פ - 2020 - מועד ב _____ 303
- 39 - חורף תשפ"א - 2021 _____ 311
- 40 - חורף תשפ"א - 2021 - נבצרים _____ 319
- 41 - חורף תשפ"א - 2021 - מאוחר _____ 327
- 42 - קיץ תשפ"א - 2021 - מועד א _____ 335
- 43 - קיץ תשפ"א - 2021 - מיוחד _____ 343
- 44 - קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב _____ 351
- 45 - חורף תשפ"ב - 2022 _____ 359
- 46 - חורף תשפ"ב - 2022 - נבצרים _____ 367
- 47 - קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד א _____ 375
- 48 - קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד ב _____ 384
- 49 - חורף תשפ"ג - 2023 _____ 393
- 50 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד א _____ 402
- 51 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד מיוחד _____ 410
- 52 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב _____ 420
- סיווג שאלות המבחנים _____ 432
- הסבר הסימנים המתמטיים שבספר _____ 437
- נוסחאון הבגרות לחמש יחידות _____ 439

מספר מילים לפני

ספר זה הוא השני משני ספרים המכילים שאלות ממבחני הבגרות במתמטיקה לשאלון 582 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. חלק זה מכיל את כל 52 המבחנים שנערכו לשאלון זה בין השנים 2009-2022, במתכונת המבחן הנוכחי. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לאותו מבחן. בספר הראשון שאלות מהשנים 2013-2004, מחולקות לפי נושאים.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוץ עריכה, או מטעם אישי של 'אסטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוץ עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדוא"ל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת לשריף אמארה מכפר ז'לפה ולשרון חיים מפתח תקוה.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לקלחתי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדויות בעלות אופי לאומי או יהודי.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

א' א' א' א'

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 382-481-482-581

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

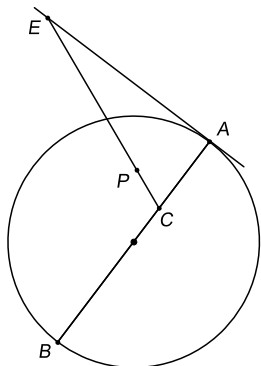
© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הסדר ועל הפתרונות שמורות למחבר

מבחן 1 - קיץ תשס"ט - 2009 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

חלק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887$.

בנקודה $A(20, 21)$ שעל המעגל העבירו משיק למעגל.

נקודה C נמצאת על קוטר המעגל AB

כך ש- $AC = \frac{1}{3} AB$.

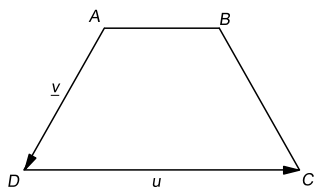
נקודה E נמצאת על המשיק,

ונקודה P נמצאת על הקטע EC כך ש- $CE = 5 CP$.

א. מצא את שיעורי הנקודה C .

ב. הבע את השיעורים של הנקודה E באמצעות השיעורים של הנקודה P ,

ומצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P הנוצרות באופן זה.



2. נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

נתון כי $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\vec{AB} = t\vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{DC} = \vec{u}$.

א. (1) הבע את t באמצעות $|\vec{u}|$ ו- $|\vec{v}|$.

(2) הבע את הוקטור \vec{BC} באמצעות \vec{u} , \vec{v} , $|\vec{u}|$ ו- $|\vec{v}|$.

נתון: $\vec{v} = (-1, y, 0)$, $\vec{u} = (8, 6, -10)$

ב. (1) מצא את שיעור y של הוקטור \vec{v} (מצא את שתי האפשרויות).

(2) מבין שני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב (1), מצא עבור איזה ערך של y

הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו.

הערה: אפשר לפתור את סעיף ב' בלי להסתמך על הפתרון של סעיף א.

3. א. בסדרה הנדסית a_1, a_2, a_3, \dots נתון: $a_4 = -8 + 8i$, $a_7 = 64 + 64i$

מצא את a_1 .

המספר הראשוני 333,667,001 ניתן להצגה: $333,667,001 = 333^3 + 667^3 + 001^3$

שאלות

1. א. $C(8,5)$ ב. $E(5x - 32, 5y - 20)$, $y = -\frac{3}{4}x + 16$

2. א. (1) $t = \frac{|\vec{u}| - |\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ (2) $\vec{BC} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{u} + \vec{v}$ ב. (1) $y_1 = \frac{1}{7}$, $y_2 = -7$ (2) $y = -7$

חלק שני - גידול ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. א. (1) בעיירה מסוימת נמצא כי אצל כל הגברים בעיירה שער הראש נושר בדעיכה מעריכית

מגיל עשרים ואחת ומעלה. כל שנה הגברים מאבדים 0.1% משער ראשם.

מצא כעבור כמה שנים מגיל עשרים ואחת יאבדו הגברים 0.2997% משער ראשם.

(2) נמצא כי אצל כל הילדות בעיירה מספר השערות גדל מאז הלידה בצורה מעריכית.

ביום מסוים היו לילדה מהעיירה 100,000 שערות.

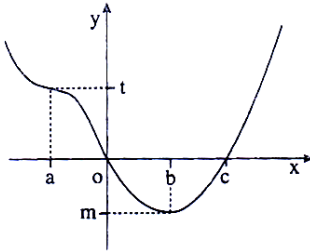
כעבור m שנים נוספו לה 15,000 שערות.

הבע באמצעות m בכמה אחוזים גדל כל שנה מספר השערות של הילדה.

ב. נתונה פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^2} + e$

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ב- $(0, 3)$. מצא את $f(x)$.

(אין קשר בין הסעיפים).



5. נתון הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

כמרכז נתון: $f(a) = d$, $f(o) = s$, $f(b) = p$, $f(c) = k$

א. הבע באמצעות פרמטרים מתאימים:

(1) את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$,

וקבע את סוגן. נמק.

(2) את השיעורים של נקודת הפיתול של $f(x)$. נמק.

ב. נסמן: x_1 - שיעור x של נקודת הפיתול של $f(x)$.

x_2 - שיעור x של נקודת המינימום של $f(x)$.

הבע באמצעות פרמטרים מתאימים את ערך האינטגרל $\int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot e^{-f(x)} dx$

בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

מבחן = 100

הגימטריה של 'מבחן' היא בדיוק מאה: $40 + 2 + 8 + 50 = 100$!

תשובות

3. א. $a_1 = -1 - i$

4. א. (1) $t = 3 \text{ years}$ (2) $100 \cdot 1.15^{\frac{1}{m}} - 100$ ב. $f(x) = -\frac{1}{4} \ln |2x - 1| + \frac{e}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + 3$

5. א. (1) $\max : (0, s)$, $\min : (c, k)$ (2) (b, p) ב. $e^{-p} - e^{-k}$

פתרון מבחן 1

א. 1.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 887 + 4 + 9$$

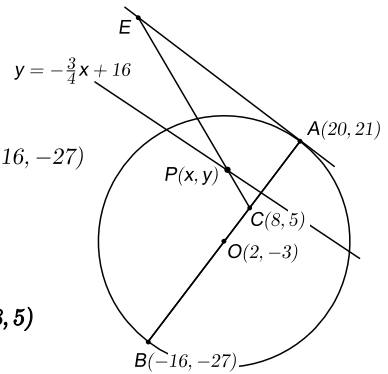
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 900 \Rightarrow O(2, -3)$$

$$\frac{x_B + x_A}{2} = x_O \Rightarrow \frac{x_B + 20}{2} = 2 \Rightarrow x_B = -16$$

$$\frac{y_B + y_A}{2} = y_O \Rightarrow \frac{y_B + 21}{2} = -3 \Rightarrow y_B = -27 \Rightarrow B(-16, -27)$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_C = \frac{20 + \frac{1}{2}(-16)}{1 + \frac{1}{2}} = 8$$

$$y_C = \frac{21 + \frac{1}{2}(-27)}{1 + \frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow C(8, 5)$$



ב.

$$P(x, y), \frac{CE}{CP} = 5 \Rightarrow \frac{EP}{PC} = 4 \Rightarrow x = \frac{x_E + 4 \cdot 8}{1 + 4} \Rightarrow x_E = 5x - 32$$

$$y = \frac{y_E + 4 \cdot 5}{1 + 4} \Rightarrow y_E = 5y - 20 \Rightarrow E(5x - 32, 5y - 20)$$

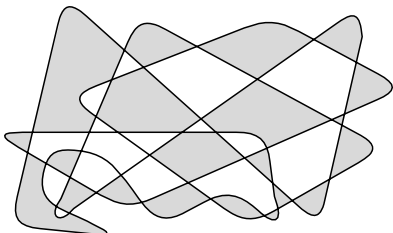
$$m_{AC} = \frac{21 - 5}{20 - 8} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}, EA \perp AC \Rightarrow m_{EA} = -\frac{3}{4}$$

$$m_{EA} = \frac{5y - 20 - 21}{5x - 32 - 20} = \frac{5y - 41}{5x - 52} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 5y - 41 = -\frac{15}{4}x + 39$$

$$\Rightarrow 5y = -\frac{15}{4}x + 80 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 16$$

הוכחה לא אלגנטית

בעיית ארבעת הצבעים: כל מפה המתארת גבולות של מדינות שונות ניתן לצבוע בארבעה צבעים בלבד, כך שכל שתי מדינות שלהן גבול משותף לאורך קטע (ולא נקודה). ייצבעו בצבעים שונים. השערה זו היתה ידועה במשך כמאה שנים, אולם הוכחה רק בשנת 1976 על ידי שני מדענים מארה"ב. המדענים נעזרו במחשב שעבד במשך 1200 שעות רצופות, על מנת לעבור על כל המקרים האפשריים. זו דוגמה 'קלאסית' להוכחה 'לא אלגנטית'.



אגב:

אם נצייר קו רציף שחותך את עצמו ככל שרק נרצה,

וכל תחום סגור ייצג מדינה,

אזי ניתן להסתפק בשני צבעים בלבד.

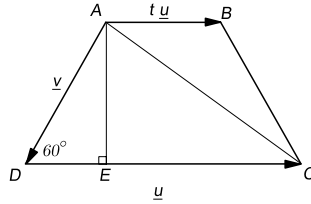
ראה ציור.

1. א. (1)

$$\angle DAB = 120^\circ \Rightarrow \angle D = 60^\circ$$

$$DE = \frac{DC - AB}{2} = \frac{|\underline{u}| - t|\underline{u}|}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{DE}{DA} = \frac{\frac{|\underline{u}| - t|\underline{u}|}{2}}{\frac{|\underline{v}|}{2}}$$



$$\Rightarrow |\underline{v}| = |\underline{u}| - t|\underline{u}| \Rightarrow t = \frac{|\underline{u}| - |\underline{v}|}{|\underline{u}|}$$

(2)

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -t\underline{u} + \underline{v} + \underline{u} = \underline{v} + (1-t)\underline{u} = \underline{v} + \left(1 - \frac{|\underline{u}| - |\underline{v}|}{|\underline{u}|}\right)\underline{u}$$

$$\vec{BC} = \underline{v} + \left(1 - 1 + \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\right)\underline{u} \Rightarrow \vec{BC} = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\underline{u} + \underline{v}$$

ב. (1)

הזווית בין הוקטורים \underline{u} ו- \underline{v} היא 120° (למרות מה שנראה בציור כי 60°), כי הזווית מוגדרת כזווית כאשר הראשים של שני הוקטורים יוצאים מנקודה אחת:

$$\underline{u} = (8, 6, -10), \quad \underline{v} = (-1, y, 0), \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{(8, 6, -10) \cdot (-1, y, 0)}{\sqrt{64+36+100} \cdot \sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{6y-8}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{1+y^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 16 - 12y = \sqrt{200} \cdot \sqrt{1+y^2} \quad / ()^2$$

$$256 - 384y + 144y^2 = 200(1+y^2) \quad / : 8$$

$$32 - 48y + 18y^2 = 25(1+y^2) = 25 + 25y^2 \Rightarrow 7y^2 + 48y - 7 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-48 \pm 50}{14} = \frac{-24 \pm 25}{7} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{7}, \quad y_2 = -7$$

בדיקה:

$$(*) \quad y = \frac{1}{7}: \quad 16 - \frac{12}{7} \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{49}} \rightarrow \frac{100}{7} \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{50}}{7} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{7} = \frac{100}{7} \quad (\checkmark)$$

$$y = -7: \quad 16 - 12 \cdot (-7) \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+49} \Rightarrow 100 \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 100 \quad (\checkmark)$$

(2)

אם DC הוא קוטר הטרפז שחסום במעגל אזי $\angle DAC$ היא זווית היקפית שנשענת על קוטר.

ככזו - היא זווית ישרה. $\angle D = 60^\circ$. מתקיים: $DC = 2AD$.

$$y = -7 \Rightarrow AD = |\underline{v}| = |(-1, -7, 0)| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$DC = |\underline{u}| = |(8, 6, -10)| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow DC = 2AD \quad (\checkmark) \Rightarrow y = -7$$

3. א.

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 q^6}{a_1 q^3} = q^3 = \frac{64+64i}{-8+8i} = \frac{8+8i}{-1+i} = \frac{8+8i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-8-8i-8i+8}{1+1} = \frac{-16i}{2} = -8i$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot (-8i) = -8 + 8i \Rightarrow a_1 = \frac{-8+8i}{-8i} = \frac{-1+i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i-1}{1} \Rightarrow a_1 = -1-i$$

4. א. (1) הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot a^t$. ניתן לקבוע את m_0 כפרמטר או כ-1 לצורך הנוחות.

$$a = 1 - \frac{0.1}{100} = 0.999, \quad m_t = 1 - \frac{0.2997}{100} = 0.997, \quad t = ?$$

$$0.997 \cdot 1 = 1 \cdot 0.999^t \Rightarrow t = \frac{\ln 0.997}{\ln 0.999} \Rightarrow t = 3 \text{ years}$$

(2)

$$m_0 = 100,000, \quad m_m = 115,000 \Rightarrow 115,000 = 100,000 \cdot a^m \Rightarrow a^m = 1.15 \Rightarrow a = 1.15^{\frac{1}{m}}$$

$$a = 1.15^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow p = 100 \cdot 1.15^{\frac{1}{m}} - 100$$

ב.

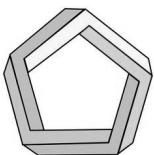
$$f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^2} + e \Rightarrow f'(x) = \int \left(\frac{1}{(2x-1)^2} + e \right) dx = -\frac{1}{2(2x-1)} + ex + c_1$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2(0-1)} + 0 + c_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{1}{2(2x-1)} + ex - \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{1}{4} \ln |2x-1| + \frac{ex^2}{2} - \frac{1}{2}x + c_2$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{4} \ln 1 + 0 - 0 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \ln |2x-1| + \frac{e}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$



דוגמה אישית

הביטוי 'תוכו כָּכְרוּ' מתאר אדם שמה שהוא חושב זה מה שהוא אומר, שהתנהגותו החיצונית היא גם אופיו הפנימי.

'תוכו ככרו' - כמו שהוא בפנים (תוכו) כך הוא גם בחוץ (ככרו).

מתברר שהביטוי 'תוכו ככרו' הוא עצמו 'תוכו ככרו':

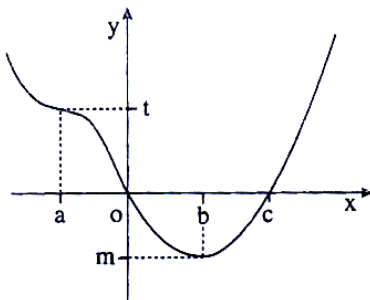
האותיות שיש בתוך המילה 'תוכו' ('וכ') הן האותיות שיש מחוץ למילה 'ככרו' ('כו') ...

חוסר דוגמה אישית

המילה 'מלעיל' היא גם מלעיל וגם מלרע; ההטעמה של המילה 'מלעיל' היא 'מלרע'.

המילה 'מלעיל', אם-כן, היא דוגמה לחוסר דוגמה אישית.

5. א.



x		a		o		b		c	
f'	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f	↗		↗	max	↘		↘	min	↗
f'	↘		↘		↘			↗	↗
f''	-	-	-	-	-	0	+	+	+
f	∩	∩	∩	∩	∩	infl.	∪	∪	∪

(1)

max: (0, s) , min: (c, k)

(2)

inflection : (b, p)

ב.

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-f(x)} \cdot f'(x) dx = -e^{-f(x)} \Big|_b^c = -e^{-f(c)} - (-e^{-f(b)}) = -e^{-k} + e^{-p}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot e^{-f(x)} dx = e^{-p} - e^{-k}$$

תוכיח!

כריסטיאן גולדבך (Goldbach C., 1690 – 1764) היה פרופסור למתמטיקה והיסטוריה באוניברסיטת פטרסבורג (רוסיה), מורם של ילדי הצאר.

גולדבך שיער כי כל מספר זוגי (פרט ל-2) ניתן לתיאור כסכום של שני מספרים ראשוניים.

דוגמאות: $8 = 5 + 3$, $112 = 53 + 59$, $250 = 11 + 239$.

מאז נבדקו כ-300,000 מספרים זוגיים, ולא נמצא מקרה שיסתור את הטענה.

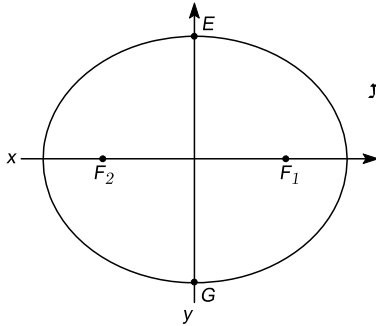
מצד שני, גם לא נמצאה הוכחה לטענה זו למרות הנסיונות הרבים.

לכן, תכונה זו ידועה היום כ'**השערת גולדבך**' (בניגוד ל'**משפט**' - טענה המוכחת מתמטית).

מבחן 52 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות משאלות 5-1. לפחות שאלה אחת מכל פרק.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. נתונות הנקודות $A(0, 28)$, $B(16, 0)$

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות

הנקודות C המקיימות: $AC^2 + BC^2 = 1,320$.

את המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א

מזיזים 8 יחידות שמאלה ו־14 יחידות למטה,

כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר y בנקודות E ו־G (מעל E).

הנקודות F_1 ו־ F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו־G.

נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו־ GF_2 הוא 24.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה F_1 .

(2) מצא את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1 , לציר x ולציר y.

ג. מצא משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.

כל המספרים 'מעניינים'

כשילד הפלא ההודי **סריניוואסה רמאנוג'ן** (Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887-1920) חלה ואושפו בבית חולים, ביקר אותו המתמטיקאי האנגלי **גוגפרי הרולד הארדי** (Godfrey Harold Hardy, 1877-1947) וסיפר שמספר המונית שבה הוא הגיע היה 1729, סתם מספר לא מעניין.

רמאנוג'אן הגיב על כך ואמר שמספר זה הוא דוקא מאוד מעניין, כי הוא המספר הקטן ביותר שניתן להציגו בשתי דרכים שונות כחזקות שלישיות של מספרים טבעיים: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

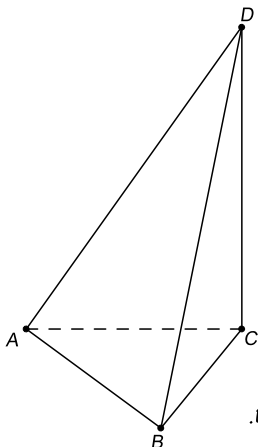
המספר 1 הוא הראשון וכל מספר טבעי מורכב מיחידות של אחד. 2 הוא הזוגי הראשון והזוגי היחיד שהוא גם ראשוני. 3 הוא הלא-זוגי הראשון שהוא ראשוני (1 אינו נחשב ראשוני). 4 הוא המספר הפריק הראשון. לפי הפיתגוראים המספר 5 קשור לנישואים כי הוא סכום של הזוגי הראשון 2 שנחשב נקבי ו־3 שנחשב זכרי.

טענה: כל המספרים 'מעניינים'.

הוכחה: בשלילה: נניח שלא כל המספרים 'מעניינים'. נתבונן במספר ה'לא-מעניין' הקטן ביותר מבין כל המספרים ה'לא מעניינים'. הרי תכונה ייחודית זו שלו הופכת אותו ל'מעניין'. סתירה. מה שהיה להוכיח...



1. א. $(x-8)^2 + (y-14)^2 = 400$ ב. $F_1 = (15, 0)$ ג. $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$ ד. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 225$



2. המקצוע DC בפירמידה ABCD, מאונך למישור ABC.

הנקודה E היא אמצע המקצוע AD.

הנקודה F מקיימת: $\vec{DF} = \frac{k}{2} \cdot \vec{DB} + k \cdot \vec{DC}$, הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{CD} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- k את \vec{EF} .

נתון: \vec{EF} מקביל למישור ABC.

ב. מצא את הערך של k .

נתון: $A(0, 0, 0)$, $C(0, n, 0)$, $B(p, 6, 0)$, D ר- B , C ו- D .

$$\vec{BD} = (-8, -2, 9), \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 24$$

ג. מצא את שיעורי הנקודות B , C ו- D .

ד. מצא את נפח הפירמידה ABCD.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB? נמק.

3. נתונה סדרה הנדסית z_1, z_2, z_3, \dots שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q .

z_1 נמצא ברביע הראשון.

$$z_1^3 = z_3$$

$$-2z_1 = \bar{z}_3$$

א. הוכח כי $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצא את z_1 .

ענה על הסעיפים הבאים עבור $q = z_1$.

ג. z_{4n-2} ו- z_{4n} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (ה הוא מספר טבעי).

ד. קבע עבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמק.

$$\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$$

good men must not obey the laws too well

(ראלף וולדו אמרסון. פילוסוף, הוגה דעות, סופר ומשורר אמריקאי. 1803-1882)

תשובות

2. א. $\vec{EF} = \frac{k}{2} \underline{u} + (\frac{1}{2} - k) \underline{v} + (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}k) \underline{w}$ ב. $k = \frac{1}{3}$ ג. $C(0, 4, 0)$, $B(8, 6, 0)$, $D(0, 4, 9)$

ד. $V = 48$ (יחידות קוב) ה. מצטלבים

3. א. $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ = 1 + i$ ב. z_{4n} ממשי טהור, z_{4n-2} מדומה טהור ד. $S_{64} = 0$

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x + \ln a}{\ln x - \ln a}$, $a > 1$, הוא פרמטר.

בסעיפים א-ג הבע תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

טענה: למשוואה $f(x) = f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x > a$.

ב. קבע אם הטענה נכונה או אינה נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x) = \ln f(x)$.

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- T את השטח המוגבל על-ידי הפונקציה $g(x)$, על-ידי ציר x

ועל-ידי הישרים $x = 3$ ו- $x = 5$. נתון: $1 < a < 3$.

ד. הבע באמצעות T את ערך האינטגרל $\int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx$.

בחן פתע

המורה הודיע כי בשבוע הבא יתקיים בחן פתע. מסתבר שהדבר אינו אפשרי. ביום ו' לא ניתן לקיים את הבחן, כי אם עד יום ה' לא התקיים בחן, אז ברור שהוא יתקיים ביום ו', אבל אז - זה כבר לא יהיה 'פתע'. ביום ו', אם כן, לא ניתן לקיים את הבחן. אם עד יום ד' לא התקיים בחן הרי שברור שהוא יתקיים ביום ה', שהרי יום ו' זה בלתי אפשרי, כאמור, אבל אז, שוב - זה כבר לא יהיה 'פתע'. . . בימים ה' ו-ו', אם כן, לא ניתן לקיים את הבחן. הלאה: אם עד יום ג' לא נערך בחן הפתע, ברור כי הוא יתקיים ביום ד', שהרי בימים ה' ו-ו' לא ניתן לקיים את הבחן. אלא ששוב: אם כן, יום ד' הוא כבר לא 'פתע'. . . וכך הלאה, וכך הלאה: מתברר, אם כן, שלא ניתן לערוך את הבחן באף לא יום אחד מימות השבוע. . . (הבחן התקיים, בסופו של דבר, ביום שלישי, להפתעת כל התלמידים. . .)

שאלות

4. א. (1) $(0 < x < a) \cup (x > a)$ (2) $x = a, y = 1$ (3) $(\frac{1}{a}, 0)$

(4) $(0 < x < a) \cup (x > a)$ √:

ב. אינה נכונה ג. (1) $(0 < x < \frac{1}{a}) \cup (x > a)$ ד. $\int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx = \ln 16 + T$

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 6}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

(3) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

(1) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על-ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל-ידי הישרים $x = \ln 7$ ו- $x = \ln 10$.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $s(x) = \int_x^{\ln 5} (f(t) - g(t)) dt$, המוגדרת בתחום $x < \ln 5$,

ד. מצא את שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה $s(x)$ וקבע את סוגה.

בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

1709

1709 הוא מספר ראשוני. אם נוסיף לו באמצע את הספרות 57 הוא עדיין יישאר ראשוני.

וכך גם אם נחזור על פעולה זו 8 פעמים. כלומר: כל המספרים להלן הם ראשוניים:

1, 709 ; 175, 709 ; 17, 575, 709 ; 1, 757, 575, 709 ; 175, 757, 575, 709

17, 575, 757, 575, 709 ; 1, 757, 575, 757, 575, 709

175, 757, 575, 757, 575, 709 ; 17, 575, 757, 575, 757, 575, 709



א. (1) $x \neq \ln 6$ (2) $x = \ln 6, y_{\rightarrow} = 1, y_{\leftarrow} = 0$ (3) $\nabla: x \neq \ln 6, \triangle: \emptyset$

ב. (1) $y_{\rightarrow} = 1$ (3) $S = \frac{9}{35}$ (יחידה ריבועית) ג. $(\ln 3, -1)$ ד. $x_{\min} = \ln 3$

פתרון מבחן 52

א. 1

$A(0, 28)$, $B(16, 0)$, $C(x, y)$

$$AC^2 + BC^2 = 1,320$$

$$(0-x)^2 + (28-y)^2 + (16-x)^2 + (0-y)^2 = 1,320$$

$$x^2 + 784 - 56y + y^2 + 256 - 32x + x^2 + y^2 = 1,320$$

$$2x^2 - 32x + 2y^2 - 56y = 280 \quad / : 2$$

$$x^2 - 16x + y^2 - 28y = 140 \quad / + 64 \quad / + 196$$

$$x^2 - 16x + 64 + y^2 - 28y + 196 = 400 \Rightarrow (x-8)^2 + (y-14)^2 = 400 \quad \text{מעגל}$$

ב. 1 הזאת המעגל שהתקבל 8 יחידות שמאלה, ו-14 יחידות למטה,

מעתיקה את מרכז המעגל לראשית הצירים.

$$x^2 + y^2 = 20^2 \quad \text{כך שמתקבל המעגל הקנוני}$$

לכן חיתוך המעגל עם ציר y הן הנקודות $(0, \pm 20)$, כלומר: $E(0, 20)$ ו- $G(0, -20)$

$$F_1(c, 0) \Rightarrow \underline{EF_1}: m = \frac{20}{c}, \quad (0, 20) \Rightarrow y - 20 = -\frac{20}{c}(x - 0) \Rightarrow 20x + cy - 20c = 0$$

$$d((0, 0), EF_1) = \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow \frac{|-20c|}{\sqrt{20^2 + c^2}} = 12 \Rightarrow 400c^2 = 144 \cdot (400 + c^2)$$

$$\Rightarrow 256c^2 = 144 \cdot 400 \Rightarrow c^2 = 225 \Rightarrow c = \pm 15 \Rightarrow F_1 = (15, 0)$$

(2)

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 15^2 = a^2 - 20^2 \Rightarrow a^2 = 625 \Rightarrow \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{400} = 1$$

ג.

$$\underline{EF_1}: 20x + 15y - 300 = 0 \equiv 4x + 3y - 60 = 0$$

$$d((R, R), EF_1) = R$$

$$\frac{|4R+3R-60|}{\sqrt{16+9}} = R \Rightarrow |7R-60| = 5R$$

$$(1) 7R - 60 = 5R$$

$$\Rightarrow R = 30 > 15 \quad (\times)$$

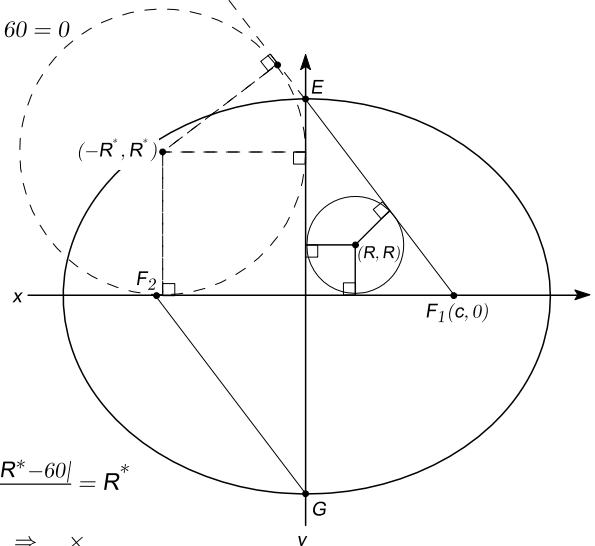
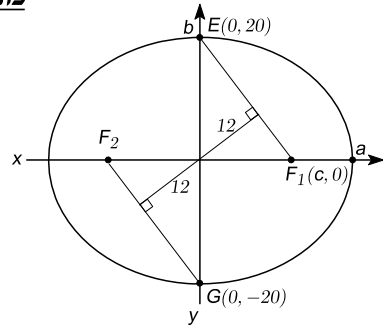
$$(2) 60 - 7R = 5R \Rightarrow R = 5$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$d((-R^*, R^*), EF_1) = R^* \Rightarrow \frac{|-4R^*+3R^*-60|}{5} = R^*$$

$$(1) -R^* - 60 = 5R^* \Rightarrow R^* < 0 \Rightarrow \times$$

$$(2) R^* + 60 = 5R^* \Rightarrow R^* = 15 \Rightarrow (x-15)^2 + (y-15)^2 = 225$$



$$\vec{EF} = \vec{ED} + \vec{DF} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AD} + \frac{k}{2} \cdot \vec{DB} + k \cdot \vec{DC} \quad \text{א.}$$

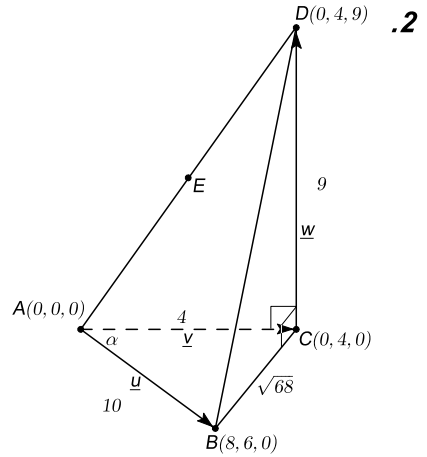
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{AC} + \vec{CD}) + \frac{k}{2} \cdot (\vec{DC} + \vec{CB}) + k \cdot \vec{DC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) + \frac{k}{2} \cdot (-\underline{w} + \vec{CA} + \vec{AB}) + k \cdot (-\underline{w}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2} \cdot \underline{w} + \frac{k}{2} \cdot (-\underline{w} - \underline{v} + \underline{u}) + k \cdot (-\underline{w}) \\ &\Rightarrow \vec{EF} = \frac{k}{2} \underline{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right) \underline{v} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}k\right) \underline{w} \end{aligned}$$

ב. מישור ABC נפרש עליידי \underline{u} ו- \underline{v} .

מכיון ש- $\vec{EF} \parallel ABC$ הרי ש- \vec{EF} הוא

צירוף ליניארי של אותם שני וקטורים,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \quad \text{ולכן המקדם של } \underline{w} \text{ הוא } 0$$



ג.

$$A(0,0,0), C(0,n,0), B(p,6,0), \underline{u} \cdot \underline{v} = 24, \vec{BD} = (-8, -2, 9)$$

$$\underline{v} = \vec{AC} = C - A = (0, n, 0), \underline{u} = \vec{AB} = B - A = (p, 6, 0)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (p, 6, 0) \cdot (0, n, 0) = 6n = 24 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow C(0, 4, 0)$$

$$D(x, y, z) \Rightarrow \vec{BD} = D - B = (x - p, y - 6, z) = (-8, -2, 9)$$

$$\left. \begin{aligned} x - p = -8 &\Rightarrow x = p - 8 \\ y - 6 = -2 &\Rightarrow y = 4 \\ z = 9 & \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(p - 8, 4, 9)$$

$$\underline{w} = \vec{CD} = D - C = (p - 8, 0, 9)$$

$$\vec{CD} \perp ABC \Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow (p - 8, 0, 9) \cdot (p, 6, 0) = 0$$

$$\Rightarrow p(p - 8) = 0, p > 0 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow B(8, 6, 0), D(0, 4, 9)$$

ד.

$$AC = 4, AB = \sqrt{64 + 36} = 10, BC = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}, DC = 9$$

$$\triangle ABC: 68 = 100 + 16 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0.6 \Rightarrow \sin \alpha = 0.8$$

משפט הקוסינוסים

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 0.8\right) \cdot 9 \Rightarrow V = 48 \quad \text{(יחידות קוב)}$$

ה. \vec{EF} מקביל ל- ABC , ולכן אינו חותך את $\vec{AB} = \underline{u}$.

$$\vec{EF} = \frac{1}{6} \underline{u} + \frac{1}{6} \underline{v} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{הישירים מצטלבים.}$$

א. 3

$$z_1^3 = z_3 \Rightarrow z_1^3 = z_1 q^2 \quad / : z_1 \Rightarrow z_1^2 = q^2 \Rightarrow q_{1,2} = \pm z_1 \quad (\checkmark)$$

ב.

$$-2z_1 = \overline{z_3}, \quad z_1 = r \operatorname{cis} \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{-2} r \operatorname{cis} \alpha = z_1 q^2 = r \operatorname{cis} \alpha \cdot (\pm r \operatorname{cis} \alpha)^2 = (r \operatorname{cis} \alpha)^3$$

$$\Rightarrow \underline{2 \operatorname{cis} 180^\circ} \cdot r \operatorname{cis} \alpha = \overline{r^3 \operatorname{cis} 3\alpha}$$

$$2r \operatorname{cis} (180^\circ + \alpha) = r^3 \operatorname{cis} (-3\alpha)$$

$$(1) \quad 2r = r^3 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$(2) \quad 180^\circ + \alpha = -3\alpha + 360^\circ k \Rightarrow 4\alpha = -180^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = -45^\circ + 90^\circ k$$

$$z_1 \in I_{\text{quadrant}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ = 1 + i$$

ג.

$$q = z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ$$

$$z_{4n} = z_1 q^{4n-1} = q \cdot q^{4n-1} = q^{4n} = ((\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ)^4)^n = (4 \operatorname{cis} 4 \cdot 45^\circ)^n$$

$$= (4 \operatorname{cis} 180^\circ)^n = (4 \cdot (-1))^n \Rightarrow z_{4n} = (-4)^n \Rightarrow z_{4n} \text{ ממשי טהור}$$

$$z_{4n-2} = z_1 q^{4n-3} = q \cdot q^{4n-3} = q^{4n-2} = ((\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ)^4)^n \cdot (\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ)^{-2}$$

$$= (4 \operatorname{cis} 180^\circ)^n \cdot (\frac{1}{2} \operatorname{cis} (-90^\circ)) = (-4)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot (-i) = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^n i \Rightarrow z_{4n-2} \text{ מדומה טהור}$$

ד.

$$\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{64}$$

$$q_a = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{z_{n+1}}{(\sqrt{2})^{n+1}} : \frac{z_n}{(\sqrt{2})^n} = \frac{z_{n+1}}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{z_n} = \frac{z_n \cdot q}{\sqrt{2} z_n}$$

$$= \frac{q}{\sqrt{2}} = \frac{z_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ}{\sqrt{2}} = \operatorname{cis} 45^\circ = q_a$$

$$S_{64} = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\operatorname{cis} 45^\circ)^{64} - 1}{\operatorname{cis} 45^\circ - 1} = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{cis} 64 \cdot 45^\circ - 1}{\operatorname{cis} 45^\circ - 1} = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{cis} 2880^\circ - 1}{\operatorname{cis} 45^\circ - 1}$$

$$= \frac{z_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{cis} 0^\circ - 1}{\operatorname{cis} 45^\circ - 1} = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-1}{\operatorname{cis} 45^\circ - 1} \Rightarrow S_{64} = 0$$

המכפלות להלן מכילות, כל אחת, את כל הספרות מ' 1 עד 9 פעם אחת בדיוק:

$$4 \times 1738 = 6952, \quad 4 \times 1963 = 7852, \quad 12 \times 483 = 5796, \quad 18 \times 297 = 5346$$

$$27 \times 198 = 5346, \quad 39 \times 186 = 7254, \quad 42 \times 138 = 5796, \quad 48 \times 159 = 7632$$

$$f(x) = \frac{\ln x + \ln a}{\ln x - \ln a}, \quad a > 1, \quad (1) \ln x \Rightarrow \underline{x > 0}, \quad (2) \ln x - \ln a \neq 0 \Rightarrow \underline{x \neq a} \quad (1) \text{ א. 4}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (0 < x < a) \cup (x > a)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x (1 + \frac{\ln a}{\ln x})}{\ln x (1 - \frac{\ln a}{\ln x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\rightarrow 1 + \frac{\ln a}{-\infty} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ (חור') אירציפות סליקה}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{\rightarrow 2 \ln a}{\rightarrow 0} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \Rightarrow \mathbf{x = a} \quad (* a > 1 \Rightarrow \ln a \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x (1 + \frac{\ln a}{\ln x})}{\ln x (1 - \frac{\ln a}{\ln x})} = \frac{\rightarrow 1 + \frac{\ln a}{\infty} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow \mathbf{y = 1}$$

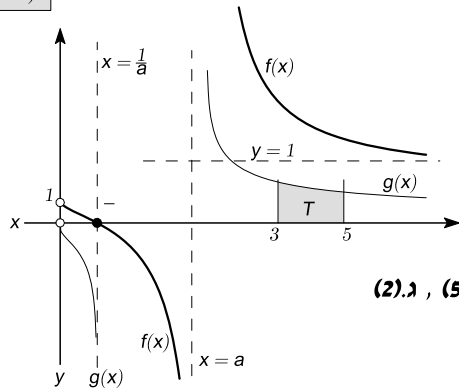
(3)

$$y = 0 \Rightarrow \ln x + \ln a = 0 \Rightarrow \ln x = -\ln a = \ln a^{-1} \Rightarrow x = a^{-1} \Rightarrow (\frac{1}{a}, 0)$$

(4)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - \ln a) - \frac{1}{x}(\ln x + \ln a)}{(\ln x - \ln a)^2} = \frac{-2 \ln a}{x (\ln x - \ln a)^2}$$

x	0		a	
f'	∅	$\frac{-}{+} = -$	∅	$\frac{-}{+} = -$
f	∅	\searrow	asym.	\searrow



(2) ג, (5)

$$\underline{\searrow}: (0 < x < a) \cup (x > a)$$

ב. אינה נכונה. בתחום $x > a$ הפונקציה חיובית ומתקיים: $f(x) > 1$.

בתחום זה הפונקציה יורדת $\Leftarrow f'(x) < 0 \Leftarrow$ אין פתרון.

$$g(x) = \ln f(x) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow (0 < x < \frac{1}{a}) \cup (x > a) \quad (1) \text{ ראה ציור גרף } f(x):$$

(2) הציור - לעיל. הניתוח - להלן:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-}{+} < 0 \quad \forall x \in \{(0 < x < \frac{1}{a}) \cup (x > a)\} \Rightarrow g(x) \searrow \quad \forall x \in \{(0 < x < \frac{1}{a}) \cup (x > a)\}$$

$$g(x) = \ln f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \rightarrow \ln 1 = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ (חור') אירציפות סליקה}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^-} g(x) = \rightarrow g(\frac{1}{a}) = \rightarrow \ln f(\frac{1}{a}) = \rightarrow \ln (+0) = -\infty \Rightarrow x \rightarrow -$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \rightarrow \ln (+\infty) = +\infty \Rightarrow x \leftarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \rightarrow \ln 1 = 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

ד.

$$\int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx = \int_3^5 (\ln 4 + \ln f(x)) dx = \int_3^5 \ln 4 dx + \int_3^5 g(x) dx$$

$$= x \ln 4 \Big|_3^5 + T = 5 \ln 4 - 3 \ln 4 + T = 2 \ln 4 + T \Rightarrow \int_3^5 \ln(4 \cdot f(x)) dx = \ln 16 + T$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 6}, \quad e^x - 6 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 6 \Rightarrow x \neq \ln 6 \quad (1) \text{ א. 5}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \ln 6} f(x) = \frac{\rightarrow 6}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = \ln 6$$

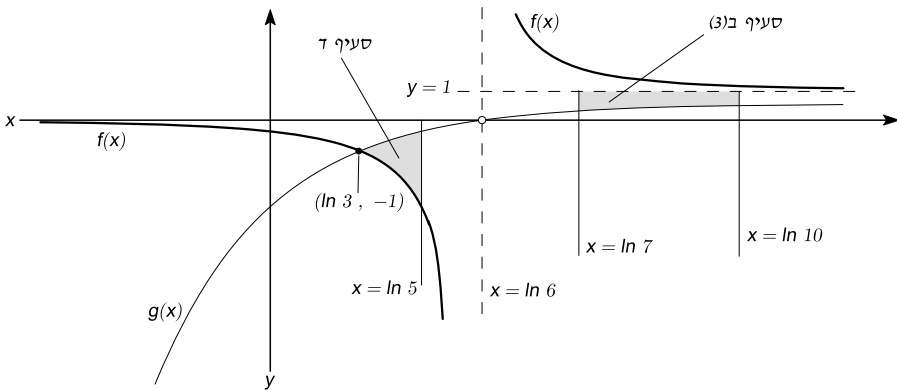
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot e^x}{e^x(1 - \frac{6}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{6}{e^x}} = \frac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow y_{\rightarrow} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0-6} = \frac{0}{-6} = 0 \Rightarrow y_{\leftarrow} = 0$$

(3)

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 6) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 6)^2} = \frac{-6e^x}{(e^x - 6)^2} < 0 \quad \forall x \in \{x \neq \ln 6\} \Rightarrow \underline{y}: x \neq \ln 6, \quad \underline{x}: \emptyset$$

(4)



(1) ב.

$$\underline{g(x) = \frac{1}{f(x)}}: \quad \lim_{x \rightarrow \ln 6} g(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 6} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow (\ln 6, 0) \text{ ('חור')} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow y_{\rightarrow} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \emptyset$$

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{-}{+} = + \Rightarrow g(x) \nearrow \quad \forall \{x \neq \ln 6\} \quad \text{(2) לעיל.}$$

(3)

$$S = \int_{\ln 7}^{\ln 10} \left(1 - \frac{e^x - 6}{e^x}\right) dx = \int_{\ln 7}^{\ln 10} \left(1 - 1 + \frac{6}{e^x}\right) dx = \int_{\ln 7}^{\ln 10} \frac{6}{e^x} dx = 6 \int_{\ln 7}^{\ln 10} e^{-x} dx = -6e^{-x} \Big|_{\ln 7}^{\ln 10}$$

$$= -6(e^{-\ln 10} - e^{-\ln 7}) = -6 \cdot (10^{-1} - 7^{-1}) = -6 \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{7}\right) \Rightarrow S = \frac{9}{35} \text{ (יחידה ריבועית)}$$

ג.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{e^x}{e^x - 6} = \frac{e^x - 6}{e^x} \Rightarrow e^{2x} = e^{2x} - 12e^x + 36 \Rightarrow 12e^x = 36$$

$$\Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \Rightarrow y = \frac{3}{3-6} = -1 \Rightarrow (\ln 3, -1)$$

ד. בתחום $\ln 3 < x < \ln 5$ מתקיים: $f(x) < g(x)$. ראה ציור לעיל.

לכן בתחום זה מתקבלים ערכים שליליים עד לנקודת החיתוך ב- $x = \ln 3$.

האינטגרל 'צובר' שטח שלילי מ- $x = \ln 3$ עד $x = \ln 5$. לכן: $x_{\min} = \ln 3$

סימנים מתמטיים המופיעים בספר

U - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x < 2$ או $x > 9$ ייכתב כך: $(x < 2) \cup (x > 9)$

∩ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x < 8$ וגם $x > 1$ הוא התחום: $1 < x < 8$.

נרשום זאת כך: $1 < x < 8 \Rightarrow (x > 1) \cap (x < 8)$.

(√) - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

∈ - שייכות. דוגמה: $x \in [1, 9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1, 9]$ או: $1 \leq x \leq 9$

דוגמה: $(1, 2) \notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1, 2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו- D .

∀ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$. כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשני.

$$\text{דוגמה: } \frac{(x-1)^2}{x^6} > 0 \quad \forall \{x \neq 0, x \neq 1\}$$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ-0 לכל x השונה מ-0 ושונה מ-1.

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $x_{1,2} = \frac{1 \pm 19}{12} = \dots \Rightarrow 6x^2 - x - 15 = 0$
 זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\Delta}$ ובבדיקת החישוב.

ללא הגבלת הכלליות - קביעת ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור להצטמצם בהמשך). למשל, אם יש למצוא גודל זווית לפי יחסי צלעות, ניתן לקבוע אורך אחת מהן ב-1 (יחידת אורך אחת, או כל ערך אחר).

∅ - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-5}}{3} = \emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון

ep - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד-צדדיות (אלא אם כן הפונקציה

בסביבה החד-צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5, 6)$: \min_{ep} .

ab - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7, 11)$: \max_{ab} .

ext - extreme קיצון.

cm^2 - סמ"ר, cm^3 - סמ"ק, **asym.** - אסימפטוטה, **infi.** - פיתול (inflection)

↗ - עליה, ↘ - ירידה, למשל: $\forall x > 6 \nearrow f$ - המשמעות: הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 6$

∪ - קעירות (קעירות כלפי מעלה), ∩ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x \rightarrow a^+$ - שאיפה ל- a מימין, למשל: $x \rightarrow 0^+$ הכוונה היא לשאיפה $0.1, 0.01, 0.001 \dots$

$x \rightarrow a^-$ - שאיפה ל- a משמאל, למשל: $x \rightarrow 0^-$ הכוונה היא לשאיפה $0.9, 0.99, 0.999 \dots$

lim - קיצור של limit, גבול.

למשל: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x) = 5$: הגבול של $f(x)$ כאשר x 'שואף' ל- ∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y = 5$).

$y_{\rightarrow} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד-צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד.

$y_{\leftarrow} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד-צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד.

ללא הגבלת הכלליות - הסבר

כשצריך למצא יחסים בין חלקים שונים ללא נתוני גודלם, מסמנים בדרך כלל, את גודל אחד החלקים בפרמטר, נניח a , ואת החלקים האחרים בהתאם ליחס שלהם לפרמטר שקבענו. במקרים כאלה ניתן לקבוע מספר (במקום פרמטר) שנח לנו לעבוד איתו ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות', שזה אומר שאותו גודל שקבענו הוא מקרה פרטי המתאים גם לכל גודל אחר. דוגמה: אורך אחד הניצבים במשולש ישר-זווית גדול פי שלושה מאורך הניצב האחר.

פי כמה גדול אורך היתר מאורך הניצב הקטן?

פתרון: ברור מנוסח השאלה שלא משנה מהם אורכי הצלעות המשולש אלא רק היחס ביניהם.

נסמן את אורך הניצב הקטן ב- a . מכאן שאורך הניצב הגדול הוא $3a$.

נפעיל את משפט פיתגורס ואז אורך היתר הוא:

$$\sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = \sqrt{10a^2} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2} = a\sqrt{10}$$

ולכן היתר גדול מהניצב הקטן פי $\frac{a\sqrt{10}}{a} = \sqrt{10}$.

בפתרון זה היינו רשאים לקבוע את אורך הניצב הקטן כ-1 (ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות').

לכן אורך הניצב הגדול היה 3 ואורך היתר היה $\sqrt{10}$. היחס שהיה מתקבל הוא בדיוק אותו יחס.

אם היינו קובעים את אורך הניצב הקטן כ-8. אורך הניצב הגדול היה 24. אורך היתר היה $24\sqrt{10}$,

$$\frac{24\sqrt{10}}{24} = \sqrt{10} \text{ - יחס - אותו יחס}$$

מכאן שניתן לבחור במקרים כאלה את אורך אחד הגדלים לנוחותנו ומשם להמשיך בפתרון.

'פוטנ' זה מאושר לשימוש בפתרון מבחני הבגרות על-ידי משרד החינוך.

שינוי גבולות אינטגרציה בחישוב שטח - הסבר

חישוב שטח בין גרף פונקציה לבין ציר x הנמצא מתחת לציר x נותן ערך שלילי.

השטח הינו הערך המוחלט של אותו ערך שקיבלנו.

ישנן מספר אפשרויות כדי לקבל את הערך הנכון.

1. סימון כל הביטוי בערך מוחלט:

$$S = \left| \int_1^7 (x^2 + 8x + 7) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 7x \right) \Big|_1^7 \right| =$$

$$\left| \left(\frac{1}{3} + 4 + 7 \right) - \left(\frac{343}{3} + 98 + 49 \right) \right| = \left| 11\frac{1}{3} - 261\frac{1}{3} \right| = \left| -250 \right| = 250$$

2. הצמדת מינוס לביטוי:

$$S = - \int_1^7 (x^2 + 8x + 7) dx = \dots = -(-250) = 250$$

3. הפיכת גבולות האינטגרציה (לשם כך התכנסנו ...):

$$S = \int_7^1 (x^2 + 8x + 7) dx = \dots = 261\frac{1}{3} - 11\frac{1}{3} = 250$$

נוסחאות בגרות רשמי - 5 יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- סדרות:

סדרה הנרסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1 - q}$	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	סכום

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = R^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ הם:

$z_k = \sqrt[n]{R} [\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} : $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos \alpha$

מרחק בין נקודה \underline{p} למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin \beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v}_1 \cdot \underline{x} + e_1 = 0$, $\underline{v}_2 \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos \alpha = \frac{|\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2|}{|\underline{v}_1| \cdot |\underline{v}_2|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$ היא: $(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l}, \frac{ly_1 + ky_2}{k+l})$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$: $d = | \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} |$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

בנקודה (x_0, y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$

בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

אליפסה - משוואת אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

מרחק המוקד מהראשית: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

סכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים: $r_1 + r_2 = 2a$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית.

כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Yesterday is history, tomorrow is a mystery.
Today is a gift, that's why it's called the present.

טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- משפט הסינוסים: R (רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

- משפט הקוסינוסים: γ היא הזווית הכלואה בין a ל- b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

- שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול, l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות: $(x^t)' = t x^{t-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת

של u לפי x (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$)

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c$