בגרויות מתמטיקה 581

תשובות סופיות - אלי מיטב - חלק ראשון

מספר מילים לפנֵי

ספר זה הוא הראשון משני ספרים המכילים שאלות ממבחני הבגרות במתמטיקה לשאלון 581 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. בחלק זה שאלות מהשנים 1967–2016. השאלות מחולקות לפי נושאים. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה. בספר השני מובאים כל 44 המבחנים שנערכו לשאלון זה בין השנים 2009–2021, במתכונת המבחן הנוכחי.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$ - לכל , $\in$ - שייך , $\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , $\cup$ - איחוד: היחס 'או' , $\cap$ - חיתוך: היחס 'וגם'

$\emptyset$ - קבוצה ריקה , ab. - מוחלט , ep. - נקודת קָצֶה (end point) , ab. - מוחלט (absolute)

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$y_{\rightarrow} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית ימנית $(\rightarrow +\infty)$ - כנ"ל שמאלית $(\rightarrow -\infty)$ - $y_{\leftarrow} = k$

$x_{\rightarrow} = k$ אסימפטוטה אנכית חד־צדדית ימנית $(x \rightarrow k$ משמאל$)$, $x_{\leftarrow} = k$ - כנ"ל - שמאלית

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'.
ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בחינם.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת ל**שריף אמארה** מכפר זָלָפָה ול**שרון חיים** מפתח תקוה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשפ"ב - 2022), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לִחְלַחְתִי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי.**

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה   אלי מיטב

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו גם לשאלונים 582-482-481

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו לשאלונים 582-581-482-481-382

אלגברה - בעיות מילוליות - תנועה

בכל השאלות - מהירות המתוארים הינה קבועה, אלא אם כן צוין אחרת.

1. (5 יח׳ , קיץ תשכ״ז - 67)

שתי רכבות, הנוסעות בין שתי ערים א׳ ו־ב׳, יצאו בזמן אחד,

האחת מ־א׳ ל־ב׳ והשניה מ־ב׳ ל־א׳. עד הפגישה עברה האחת 108_{km} יותר מהשניה.

בהמשך הנסיעה הגיעה הרכבת האחת ל־ב׳ כעבור 9 שעות ואילו השניה הגיעה ל־ א׳

כעבור 16 שעות אחרי הפגישה.

חשב את המרחק בין שתי הערים.

2. (5 יח׳ , סתיו תשכ״ח - 67)

שני אנשים יצאו בבת אחת זה לקראת זה, האחד מ־ A והשני מ־ B .

הם נפגשו במרחק 50_m ב־ B , המשיכו כל אחד בדרכו, והגיעו, הראשון ל־ B והשני ל־ A .

מיד לאחר מכן חזרו למקומות מוצאם, ובדרכים חזרה נפגשו שנית במרחק 25_m מ־ A .

חשב את המרחק מ־ A ל־ B .

3. (5 יח׳ , אביב תשכ״ח - 68)

שני צופים יצאו לדרך זה לקראת זה משני מחנות A ו־ B .

הם נפגשו והמשיכו כל אחד בדרכו. הצופה מ־ A הגיע ל־ B , וזה מ־ B הגיע ל־ A .

כל אחד מהם חזר מייד למחנה שממנו בא. בדרך חזרה נפגשו הצופים שנית ואז התברר להם,

כי עד לפגישה השניה עבר הצופה מ־ A בסך הכל $_{km}$ יותר מאשר הצופה מ־ B .

הצופה מ־ A הגיע חזרה ל־ A שעה לאחר הפגישה השניה.

הצופה מ־ B הגיע ל־ B שעתיים וחצי לאחר פגישה זו.

מה היתה מהירותו של כל אחד מהצופים?

תשובות

1. 756_{km} **2.** 125_m **3.** $A:\ 4_{km/h}$, $B:\ 3.2_{km/h}$

בעיות מילוליות - הספק

בכל השאלות להלן - הספק הפועל, הצינור וכיו״ב - קבוע, אלא אם כן נתון אחרת.

1. (5 יח׳ , אביב תש״ל - 70)

שני צינורות מובילים מים לבריכה. הצינור השני מזרים 18 מ״ק בדקה.

יום אחד, כשהבריכה היתה ריקה, פתחו את הצינור הראשון ורק 20 דקות אחרי כן את השני.

כשהבריכה נתמלאה היתה כמות המים, שנכנסה דרך הצינור הראשון, גדולה פי שניים מזו, שנכנסה דרך השני.

למחרת, כשהבריכה היתה שוב ריקה, פתחו את שני הצינורות בבת אחת והבריכה נתמלאה ב־ 12 דקות פחות מאשר ביום הקודם (החל מזמן פתיחתו של הצינור הראשון).

מצא את נפח הבריכה.

2. (5 יח׳ , אביב תשל״א - 71)

בביח״ר הוטל על כל אחד משני חרטים להכין אותו מספר חלקי חילוף.

החרט הראשון החל בעבודה מיד וסימה בשמונה שעות.

החרט השני החל בעבודה למעלה משעתיים לאחר החרט הראשון וסיים אותה שלוש שעות לפניו.

שעה לאחר שהחרט השני החל בעבודתו היה מספר חלקי חילוף שביצע השני שווה למספרם של אלה שהכין החרט הראשון מתחילת עבודתו עד לרגע זה.

בכמה שעות ביצע החרט השני את עבודתו?

3. (5 יח׳ , חורף תשל״ב - 72)

כתב־יד נמסר להדפסה לשתי כתבניות.

הכתבנית השניה ניגשה לעבודה שעה אחת אחרי הראשונה.

שלוש שעות לאחר שהכתבנית הראשונה ניגשה סיימו שתיהן יחד את ההדפסה של 55% מכתב היד.

הן המשיכו בהדפסה וגמרו יחד.

לאחר גמר העבודה התברר שכל אחת מהכתבניות ביצעה את מחצית העבודה.

בכמה שעות היתה כל אחת מהכתבניות יכולה לבצע לבדה את העבודה?

המספר הראשוני 3413 **ניתן להצגה הבאה:** $3413 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$

תשובות

1. 540_{m^3}

2. שעתיים

3. הראשונה - 10_h , השניה - 8_h

אלגברה - סדרות - סדרה חשבונית

1. (5 יח׳ , אביב תשכ״ז - 67)

סדרת המספרים הטבעיים חולקה לקבוצות הבאות: $1 \; ; \; (2,\ 3,\ 4) \; ; \; (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9) \; ; \; \ldots$.

האיבר האחרון בכל קבוצה הוא ריבוע המספר, המראה את מקום הקבוצה בסדרת הקבוצות.

א. הוכח כי מספר האיברים בכל קבוצה הוא $2n - 1$ (n - מקום הקבוצה בסדרת הקבוצות).

ב. הוכח כי סכום האיברים בקבוצה ה־n־ית הוא $(2n-1)(n^2 - n + 1)$.

2. (5 יח׳ , קיץ תשכ״ז - 67)

א. נתונה סדרת מספרים. נוסחת הסכום של n איבריה הראשונים היא: $S_n = 2n + 3n^2$.

(1) מצא את נוסחת האיבר ה־n־י a_n. (2) הוכח שהסידרה חשבונית.

ב. (1) האם המשפט הבא נכון: נוסחת הסכום n איברים הראשונים של סידרה חשבונית היא בעלת הצורה: $S_n = an^2 + bn + c$? נמק.

(2) האם בניסוח המשפט הנ״ל חשוב לציין שמדובר על n האיברים הראשונים או מספיק לציין שמדובר על n איברים עוקבים?

3. (5 יח׳ , סתיו תשכ״ח - 67)

בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא -54 וההפרש הוא 4.

א. מצא את סכום כל האיברים השליליים בסידרה.

ב. כמה, לכל הפחות, איברים עוקבים בסדרה, החל בראשון, יש לחבר כדי לקבל סכום חיובי?

4. (5 יח׳ , אביב תשכ״ח - 68)

את איברי הסדרה החשבונית: $1 \; , \; 5 \; , \; 9 \; , \; 13 \; , \; \ldots$

חילקו לקבוצות הבאות: $(1,\ 5) \; ; \; (9,\ 13,\ 17,\ 21) \; ; \; \ldots$. בקבוצה הראשונה שני איברים, בקבוצה השנייה ארבעת האיברים הבאים וכו׳. בכל קבוצה שני איברים יותר מאשר בקודמת לה.

א. הוכח: האיבר הראשון בקבוצה ה־n־ית הוא $(2n-1)^2$.

ב. הוכח: סכום האיברים בקבוצה ה־n־ית הוא $2n(4n^2 - 1)$.

לבריאות
שמתם לב שהברכה 'לבריאות' (למתעטש) מורכבת מ'לֵב' ו'רִיאות' ?

תשובות

2. **א.** **(1)** $a_n = 6n - 1$

3. **א.** -392 **ב.** 29

אלגברה - סדרות - סדרה הנדסית

1. (5 יח׳ , אביב תש״ל - 70)

א. **(1)** הוכח: מכפלת שני איברים בסדרה הנדסית, שמקומו של אחד מהם לגבי האיבר הראשון הוא זה של השני לגבי האיבר האחרון (כגון מכפלת האיבר הראשון והאחרון, השני מהתחלה והשני מהסוף וכו׳), היא גודל קבוע.

(2) הוכח, בהסתמך על א־1: מכפלת n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית היא $P_n = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$.

ב. הסדרה: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ היא הנדסית. נגדיר: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ו־ $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$. הוכח: $P_n = (\frac{S}{T})^{\frac{n}{2}}$ (P_n - המכפלה מסעיף א(1)).

2. (5 יח׳ , סתיו תשל״א - 70) הוכח:

הביטוי $(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$ הוא ריבוע של מספר שלם.

3. (5 יח׳ , אביב תשל״א - 71) סכום $(n-1)$ איבריה הראשונים של סדרה הנדסית ל־372.

אם נחסיר מסכום n - איבריה הראשונים של הסדרה הנ״ל את האיבר הראשון נקבל 186,

ואם נחסיר מסכום n - איבריה הראשונים של הסדרה הנ״ל את שני האיברים הראשונים נקבל 90.

מצא את מנת הסדרה ההנדסית הנ״ל ואת איברה הראשון.

4. (5 יח׳ , קיץ תשל״ה - 75) **א.** $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ הם n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית.

הוכח: $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \dots , \frac{1}{a_n}$ גם היא סדרה הנדסית.

ב. נסמן: $S_n' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ הוכח: $\frac{S_n}{S_n'} = a_1 \cdot a_n$.

5. (5 יח׳ , חורף תשמ״ז - 86) תהי $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ סדרה גאומטרית.

נסמן: $S = a_1 + a_2 , \dots , a_n$; $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

א. הבע את T באמצעות S , a_1 ו־ a_n **ב.** הוכח כי $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = (\frac{S}{T})^{\frac{n}{2}}$.

6. (5 יח׳ , חורף תשס״ב - 2003) נתונה סדרה הנדסית שכל n האיברים שלה הם חיוביים.

סכום $n-2$ האיברים האחרונים גדול פי 4 מסכום $n-2$ האיברים הראשונים.

א. חשב את מנת הסדרה.

ב. נתון כי n הוא מספר זוגי . $a_1 , a_2 , a_3 \dots , a_n$ הם איברי הסדרה הנתונה.

נסמן: $T_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_n$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

חשב את היחס $\frac{S_n}{T_n}$.

תשובות

3. $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = 192$ **5.** **א.** $\frac{S}{a_1 \cdot a_n}$ **6.** **א.** $q = 2$ **ב.** $\frac{S_n}{T_n} = -3$

אלגברה - סדרות - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

1. (5 יח׳ , קיץ תש״ן - 90)

סכום n אירים ראשונים בטור הנדסי אינסופי יורד, שכל איבריו חיוביים, הוא S_n.

S הוא סכום סכום הטור.

בונים טור חדש שהאיבר ה־n־י שלו הוא ההפרש: $S - S_n$.

א. הראה שהטור החדש שנוצר גם הוא טור הנדסי אינסופי יורד.

ב. אם ידוע שבטור הנתון $S = 243$, $S_2 = 216$, חשב את סכום הטור האינסופי החדש.

2. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ב - 92)

$a_1 , a_2 , a_3 \ldots$ היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת, שסכומה S_1 ומנתה $-\frac{1}{8}$.

$b_1 , b_2 , b_3 \ldots$ היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת, שסכומה S_2 ומנתה q, $\frac{1}{8} < |q| < 1$.

נתון: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots$. חשב את q.

3. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ג - 93)

נתון שבסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \ldots$, שכל איבריה חיוביים,

מתקיים: $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \ldots = n$, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots = m$.

א. בטא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון שלה באמצעות m ו־ n.

ב. סכום כל איבריה סדרה הנדסית אינסופית יורדת אחרת, שיש לה אותו איבר ראשון a_1,

הוא $2m$. הבע את מנת סדרה זו באמצעות m ו־ n.

4. (006 , חורף ס״ה - 2005)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא $4q^2$ $(0 < q < \frac{1}{2})$.

בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הכניסו איבר נוסף,

ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.

א. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.

ב. נתון כי סכום הסדרה החדשה גדול פי $48q^2$ מסכום הסדרה הנתונה. חשב את q.

ג. עבור הערך של q שמצאת בסעיף ב׳, חשב בסדרה החדשה את היחס

בין האיבר במקום הראשון ובין סכום האיברים שאחרי האיבר הראשון.

תשובות

1. **ב.** $S = 121.5$

2. $q_2 = -\frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{4}$

3. **א.** $q = \sqrt{\frac{n}{m-n}}$, $a_1 = \frac{m(m-2n)}{m-n}$ **ב.** $q = \frac{m}{2(m-n)}$

4. **א.** $k = 2q$ **ב.** $q = \frac{1}{6}$ **ג.** 2

אלגברה - סדרות - סדרות כלליות

1. (5 יח׳ , חורף תשל״א - 71)

נתונה הסדרה $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{7}{144}$, . . . , שבה: $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

מצא, בהסתמך על השוויון: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$,

את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של הסדרה הנתונה.

2. (5 יח׳ , סתיו תשל״ו - 75)

האיבר ה־n־י של סדרה נתון ע״י $a_n = k \cdot t^{n-1}$ (t, k - קבועים; $t \neq 1$).

נסמן: $T_n = S_1 + S_2 + . . . + S_n$; $S_n = a_1 + a_2 + . . . a_n$.

א. מצא את S_n **ב.** הוכח: $(1-t) \ T_n + t \cdot S_n = k \cdot n$

ג. בדוק אם השוויון בסעיף ב׳ ישאר בתוקפו כאשר $t = 1$.

3. (5 יח׳ , קיץ תשס״ב - 2002 - מועד ב)

נתונה סדרה: $a_1 , a_2 , ... , a_n$.

נוסחת סכום n איבריה הראשונים היא $S_n = 2^7 - 2^{7-n}$.

א. הבע באמצעות n את ההפרש: $S_n - S_{n-1}$.

ב. הוכח שהסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית יורדת.

ג. נסמן: $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + . . . + \frac{1}{a_n}$. הראה כי $\frac{S_n}{T_n} = 2^{13-n}$.

4. (5 יח׳ , קיץ תשס״ג - 2003)

נתונה סדרה שנוסחת האיבר הכללי שלה היא $a_n = 2n - 6$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה זו הוא S_n.

סדרה אחרת מקיימת: $b_{n+1} - b_n = S_n + 6$.

בסדרה האחרת (b_n) יש שלושה איברים עוקבים השווים זה לזה.

מצא את המקום של כל אחד מהאיברים אלה.

אין הזדמנות שניה לעשות רושם ראשוני

תשובות

1. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

2. **א.** $S_n = k \cdot \frac{t^n - 1}{t-1}$ **ג.** כן

3. **א.** $S_n - S_{n-1} = 2^{7-n}$

4. $b_2 = b_3 = b_4$

אלגברה - סדרות - המוגדרות לפי כלל נסיגה

1. (5 יח׳ , קיץ תשנ״א - 91)

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על־ידי הכלל: $a_n + a_{n+1} = 3n - 5$.

נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

א. הראה כי: **(1)** $S_{2n} = 3n^2 - 5n$ **(2)** $S_{2n+1} = a_1 + 3n^2 - 2n$

ב. נתון: $a_1 = -2$. חשב את a_{101} .

2. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ב - 92)

נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 3n - a_n \;,\; a_1 = c$.

א. הראה כי האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית,

וכי גם האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית.

ב. חשב את סכום n האיברים הראשונים בסדרה, אם נתון ש־ n מספר זוגי.

הראה שסכום זה בלתי תלוי ב־ c .

3. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ג - 93)

נתונה הסדרה: $a_{n+1} = \frac{2^n}{2a_n} \;,\; a_1 = 1$.

א. הוכח שהסדרה החלקית $a_1, a_3, a_5, ...$ היא סדרה הנדסית.

ב. הוכח שכל איבר הנמצא במקום זוגי בסדרה הנתונה שווה לאיבר הקודם לו בסדרה.

4. (5 יח׳ , חורף תשנ״ז - 97) נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 3a_n - 8 \;,\; a_1 = 6$.

א. הוכח כי הסדרה המוגדרת על־ידי הכלל $b_n = a_n - 4$ היא סדרה הנדסית.

ב. מצא נוסחה ל־ a_n באמצעות n .

ג. הוכח כי סכום $2n$ האיברים: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}$ הוא: $\frac{1}{2}(1 - 3^{2n})$.

5. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ז - 97) נתונה הסדרה: $a_{n+2} = a_n + n + 3$, ונתון: $a_4 = t \;,\; a_5 = k$.

מצא את t ו־k , אם נתון גם ש: a_4, a_5, a_6 הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית,

ו־ a_5, a_6, a_7 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

תשובות

1. **ב.** $a_{101} = 148$

2. **ב.** $S_n = \frac{3n^2}{4}$

4. **ב.** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$

5. $t = 9 \;,\; k = 12$

הסתברות

1. (4 יח׳ , קיץ תשל״ו - 76) בעיר מסוימת אין עונים בשעות בין 2 אחה״צ ל־3 אחה״צ על אחד מתוך ארבעה חיוגי טלפון. אדם מחייג בעיר הנ״ל ובשעות הנ״ל 8 מספרי טלפון שנבחרו באקראי.

א. מהי ההסתברות שלא יענו על חיוג אחד בלבד?

ב. מהי ההסתברות שלא יענו לכל היותר על שני חיוגים?

ג. מהי ההסתברות שלא יענו לפחות על שלושה חיוגים?

2. (4 יח׳ , קיץ תשל״ז - 77) ההסתברות שיוולד בן שווה לזו שתוולד בת.

א. מהי ההסתברות שבמשפחה בת שישה ילדים יהיה מספר הבנים שווה למספר הבנות?

ב. מהי ההסתברות שכל הילדים באותה משפחה יהיו מאותו מין?
(ז״א שכולם יהיו בנים או כולם - בנות)

ג. מהי ההסתברות שבמשפחה הנ״ל יהיה לפחות בן אחד?

3. (4 יח׳ , חורף תשל״ח - 78) בשלב קריטי של מחלה מסוימת נאלצים לבצע ניתוח, כדי להציל את האדם ממוות. אחוז ההצלחה בניתוח הוא 80%. מבצעים עתה חמישה ניתוחים כנ״ל.

א. מהי ההסתברות שבדיוק ארבעה מהם יהיו מוצלחים?

ב. מהי ההסתברות שלפחות ארבעה מהם יהיו מוצלחים?

4. (4 יח׳ , קיץ תשל״ח - 78) מבין הפועלים, העובדים במקצוע מסוים, סובלים 25% ממחלה הקשורה במקצוע. בוחרים באקראי 5 פועלים העובדים במקצוע הנ״ל.

א. מהי ההסתברות שלפחות שלושה מהם סובלים ממחלה זו?

ב. מהי ההסתברות שלכל היותר שניים מהן סובלים ממחלה זו?

5. (4 יח׳ , חורף תשל״ט - 1979) שלושה אנשים יורים בבת אחת למטרה. ההסתברות שהראשון יפגע במטרה היא 0.5, שהשני - 0.6 וההסתברות שהשלישי יפגע במטרה היא 0.8.

א. מהי ההסברות שרק אחד יפגע במטרה?

ב. מהי ההסתברות שלפחות אחד יפגע במטרה?

מספר הצירופים במשחק הקוביה ההונגרית הוא: $1,929,770,126,028,800$

תשובות

1. **א.** 0.267 **ב.** 0.679 **ג.** 0.321

2. **א.** $\frac{20}{64}$ **ב.** $\frac{2}{64}$ **ג.** $\frac{63}{64}$

3. **א.** 0.4096 **ב.** 0.7373

4. **א.** 0.1035 **ב.** 0.8965

5. **א.** 0.26 **ב.** 0.96

.96 (005 , קיץ תשע"ב - 2012 , לוחמים)

יוסי נוסע מביתו לעבודה. מסלול הנסיעה שלו עובר בשני כבישים:

תחילה בכביש A ואחריו בכביש B. ההסתברות שיהיה פקק תנועה בכביש A היא 0.6 .

ההסתברות שיהיה פקק תנועה בכביש B היא $\frac{4}{5}$.

כאשר יש פקק תנועה בכביש B, ההסתברות שגם בכביש A יש פקק תנועה היא $\frac{3}{4}$.

א. קבע עבור כל אחד מההיגדים (1)-(3) שלפניך אם הוא נכון או לא נכון. נמק כל קביעה.

(1) אם כביש A פקוק, אז גם כביש B פקוק.

(2) אם כביש B אינו פקוק, ההסתברות שכביש A אינו פקוק היא $\frac{1}{2}$.

(3) ההסתברות שכביש B אינו פקוק אם כביש A אינו פקוק,

שווה להסתברות שכביש A אינו פקוק אם כביש B אינו פקוק.

ב. יוסי נוסע לעבודה בימים א, ב, ג, ד, ה. מהי ההסתברות שיוסי ייקלע לפקק תנועה

בימים א, ב, ג, ולא ייקלע לפקק תנועה בימים ד ו־ ה ?

.97 (005 , חורף תשע"ג - 2013)

בעיר מסוימת, חלק מהנבחנים במבחן תאוריה של נהיגה למדו בקורס הכנה למבחן זה.

כל מי שנכשל במבחן ניגש למבחנים חוזרים, עד שהוא מצליח.

ידוע כי אם נבחן למד בקורס הכנה, הסיכוי שיצליח במבחן הוא 75% .

סיכוי זה נשאר קבוע גם במבחנים החוזרים (אפילו אם עוברים שוב קורס הכנה).

א. מצא מהו הסיכוי של מי שלמד בקורס הכנה להצליח במבחן רק בפעם השלישית

20% מתלמידי התיכון בעיר לומדים בקורס הכנה (השאר אינם לומדים).

ידוע כי כל עוד התלמיד לא למד בקורס הכנה, הסיכוי שיצליח במבחן התאוריה הוא $\frac{1}{2}$.

ב. תלמיד תיכון בעיר הצליח במבחן התאוריה.

מהי ההסתברות שהתלמיד למד בקורס הכנה?

ג. בבית ספר מסוים בעיר כל התלמידים <u>לא</u> למדו בקורס הכנה.

ההנהלה החליטה שכל תלמיד שנכשל במבחן יחויב ללמוד בקורס, לפני שייגש למבחן חוזר.

מצא מהו הסיכוי של תלמיד בבית ספר זה להצליח במבחן רק בפעם השלישית.

סכום שני המספרים הראשוניים העוקבים: 4093 ו־ 4099 **הוא חזקה של 2 :** $8192 = 2^{13}$

תשובות

.96 **א.** **(1)** כן **(2)** לא **(3)** לא **ב.** $P = 0.02048$

.97 **א.** $P = \frac{3}{64}$ **ב.** $P = \frac{3}{11}$ **ג.** $P = \frac{3}{32}$

גאומטריה אוקלידית

להלן חלוקה לפי נושאים. שאלה בחלוקה משנית יכולה להשתייך למספר קטגוריות.
המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. חלוקה 'מעודנת' של שאלות פרק זה - בעמ' 201.
*כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. את החלוקה הכין **שרון חיים**.*

חלוקה ראשית

ללא מעגל, ללא פרופורציה ודמיון (כיתה יו"ד)
36, 41, 51a, 53, 57a-b, 59a-b1, 61, 66, 67, 71, 76, 81, 83, 86, 91, 112, 113

פרופורציה ודמיון, ללא מעגל (כיתה יו"ד)
1, 3, 4, 8, 13, 15, 17, 22, 25, 26, 27, 28, 39, 43, 58, 62, 64, 65, 69, 73, 78, 80, 82, 90, 94, 96, 97, 98, 101, 110, 111, 115, 117, 119

מעגל ללא פרופורציה ודמיון
29, 34, 38, 40, 42, 45, 46, 55, 56, 57, 59, 63, 68, 70, 84, 87, 92, 95, 99, 104, 105, 106, 116, 118

פרופורציה ודמיון במעגל
2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 60, 72, 74, 75, 77, 79, 85, 88, 89, 93, 100, 102, 103, 107, 108, 109, 114

חלוקה משנית - לפי סדר לימוד (כולל מעגל, פרופורציה ודמיון)

משולשים

- חפיפת משולשים
29, 34, 36, 42, 45, 47, 49, 51, 57, 66, 67, 71, 73, 78, 81, 84, 86, 98, 99, 102, 106, 107, 113, 115, 116, 118
- משפט חפיפה רביעי
36, 42, 45, 81
- משולש שווה-צלעות
39, 57, 61, 63, 66, 85, 93, 95, 105, 119
- משולש 30^0 - 60^0 - 90^0
85, 91
- משפט פיתגורס
5, 22, 29, 46, 50, 52, 61, 62, 74, 111, 118

מרובעים

- דלתון
67, 106, 116
- מקבילית
15, 45, 58, 69, 86, 90, 101, 105, 112
- מלבן
4, 17, 22, 26, 43, 81
- מעוין
46, 59, 61, 87, 99, 104
- ריבוע
44, 51, 61, 62, 71, 73, 78, 92, 113
- טרפז
1, 27, 47, 58, 64, 72, 81, 96, 117
- טרפז ישר-זווית
41, 80, 110
- טרפז שווה-שוקיים
53, 65, 115

קטעים מיוחדים ונקודות מפגש

- אנך אמצעי
8, 87
- תיכון ליתר במשולש ישר-זווית
41, 56, 83, 91, 112, 119
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
67
- קטע אמצעים במשולש
40, 48, 56, 67, 69, 76, 81, 83, 86
- קטע אמצעים בטרפז
76, 91, 112

שטחים

- ללא דמיון
71, 81, 112, 113
- עם דמיון, ללא שימוש ישיר ביחס שטחים
39, 58, 94, 110

השערת קולץ

נבחר מספר כשלהו. אם הוא זוגי נחלק אותו ב־2 . אם הוא אינו זוגי – נכפול אותו ב־3 ונוסיף לו 1.
התהליך יסתיים כאשר נגיע למספר 1. דוגמה: נבחר את המספר 15. נראה מה יקרה:

$$15 \to 15\cdot 3+1=46 \to 46:2=23 \to 23\cdot 3+1=70 \to 70:2=35 \to 35\cdot 3+1=160 \to$$

$$\to 160:2=80 \to 80:2=40 \to 40:2=20 \to 20:2=10 \to 10:2=5 \to$$

$$\to 5\cdot 3+1=16 \to 16:2=8 \to 8:2=4 \to 4:2=2 \to 2:2=1 \quad (\surd)$$

כל המספרים שנבדקו עד היום (עד 20 ספרות) מקיימים את ההשערה. ההשערה כי כל מספר מסתיים בסופו של התהליך ב־1 אינה מוכחת עדיין ונחשבת כבעיה קשה. השערה זו קרויה על שם המתמטיקאי הגרמני לותר קולץ (Lothar Collatz , 1910–1990). נקראת גם 'השערת 3n + 1'

פרופורציה

- משפט תאלס (ללא מעגל)
58, 82

הפוך (ללא מעגל)
3, 64, 115, 117, 119

הרחבה ראשונה (ללא מעגל)
26, 94, 96

הרחבה שנייה (ללא מעגל)
64, 78, 80, 90, 96, 97, 117

- משפט חוצה-זווית פנימית במשולש (ללא מעגל)
3, 65, 80, 82, 111

- משפט חוצה-זווית פנימית במשולש (עם מעגל)
35, 52, 74, 102, 108

- שלושת משפטי פרופורציה במעגל

שני מיתרים נחתכים
18, 52

שני חותכים
6, 30

חותך ומשיק
16, 47, 54, 79

דמיון

- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
62, 98

- יחס בין שטחי משולשים דומים (ללא מעגל)
1, 13, 15, 17, 25, 27, 28, 67, 69, 80, 101

- יחס בין שטחי משולשים דומים (עם מעגל)
31, 32, 60, 88

- יחס גבהים במשולשים דומים
39

מעגל

- עם משיק
6, 9, 11, 16, 19, 21, 24, 30, 31, 32, 33, 37, 42, 44, 47, 49, 54, 55, 60, 70, 74, 77, 79, 88, 92, 103, 106, 109, 114

- מפגש אנכים אמצעיים במשולש חסום במעגל
46

- שני מעגלים
12, 42, 45, 55, 70, 88

- קשתות
2, 23, 35, 50, 52, 63, 95, 99, 102, 104, 116

מעגל חוסם וחסום במשולש/מרובע

- מעגל חוסם משולש
10, 14, 32, 35, 46, 48, 54, 60, 74, 75, 107, 108

שווה-שוקיים
37, 103

חצי מעגל חוסם משולש
7

- מעגל חסום במשולש

חצי מעגל חסום במשולש
20, 44

- מעגל חוסם מרובע
19, 51, 55, 57, 95, 105

דלתון
85

מלבן
38

טרפז שווה-שוקיים
47, 59, 72, 106

דלתון
106

טרפז שווה-שוקיים
288

רדיוס מעגל
6, 16, 29, 30, 40, 52, 56, 63, 79, 92, 118

רדיוס מעגל חוסם וחסום במשולש/מרובע

- רדיוס מעגל חוסם משולש
46

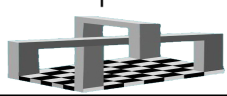
- רדיוס מעגל חסום במשולש ישר-זווית
44

- רדיוס מעגל חוסם מרובע
55

טרפז שווה-שוקיים
59, 72

- רדיוס מעגל חסום במרובע טרפז
24

הבעה באמצעות פרמטר
1, 8, 17, 22, 29, 31, 32, 60, 65, 69, 72, 118



מעשה בזבוב ובג'ון פון נוימן

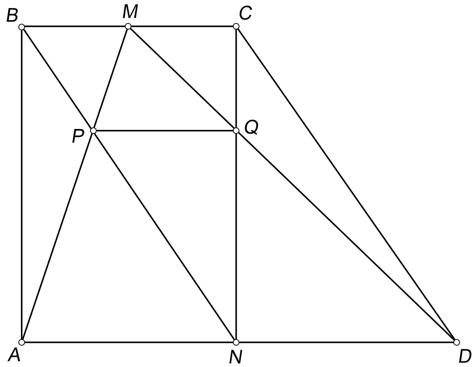
שתי רכבות, שהמרחק ביניהן הוא 200_{km} יוצאות זו לקראת זו.
מהירות כל אחת מהן היא $100_{km/h}$.
זבוב, שמהירות מעופו היא $150_{km/h}$ נמצא על קטר אחת הרכבות.
עם צאתן לדרך עף הזבוב מהרכבת האחת אל הרכבת האחרת.
כשהוא מגיע אליה הוא עף בחזרה לרכבת הראשונה וכך עף הזבוב הלוך ושוב,
עד שהרכבות מתנגשות זו בזו ומוחצות אותו למוות.
השאלה היא: מהו אורך המסלול שעף הזבוב?

ובכן, במבט ראשון זה נראה מורכב למדי: סכום המרחקים שעבר הזבוב בכל כיוון הוא סדרה אינסופית מתכנסת. יש לבנות את הנוסחה של הסדרה ולמצוא את גבול ההתכנסות שלה. דרך הרבה יותר אלגנטית היא למצוא את הזמן שעבר עד שהרכבות יתנגשו (שעה אחת) ולפי זה למצוא את הדרך שעה הזבוב באותו זמן (150_{km}).

ג'ון פון נוימן *(1903–1957 , John von Neumann) היה מתטיקאי יהודי מתבולל הונגרי, אזרח אמריקאי, מגדולי המתמטיקאים של המאה העשרים.*

מספרים שכאשר שאלו אותו את השאלה הזאת, הוא פתר אותה בתוך שניות. כשהעירו לו על כך שרוב האנשים מנסים לפתור אותה על־ידי סכום של סדרה אינסופית מתכנסת, הוא ענה: 'זה בדיוק מה שעשיתי' . . .'

.117 (005 , קיץ תשע"ב - 2012 , לוחמים)



מרובע $ABCD$ הוא טרפז ($BC \parallel AD$).

M ו־ N הן אמצעי הבסיסים.

P היא נקודת החיתוך של BN ו־ AM .

Q היא נקודת החיתוך של MD ו־ CN .

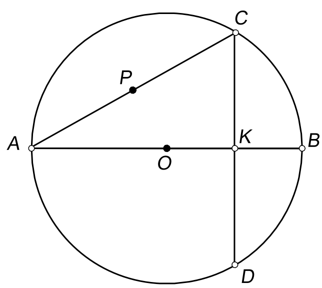
א. הוכח: **(1)** $\frac{MC}{ND} = \frac{MQ}{QD}$ **(2)** $\frac{MC}{ND} = \frac{MP}{PA}$.

ב. הוכח: $PQ \parallel AD$.

ג. נתון: $BC = 6_{cm}$, $PQ = 4_{cm}$.

חשב את האורך של AD .

.118 (005 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד א)



AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O .

הקוטר AB חותך את המיתר CD בנקודה K.

הנקודה K היא אמצע המיתר CD ,

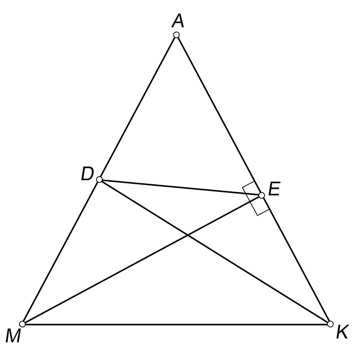
והנקודה P היא אמצע המיתר AC . $AC = CD$.

א. הוכח: $\triangle APO \cong \triangle DKB$.

ב. הוכח: $\triangle POK$ הוא שווה־שוקיים.

ג. הבע את אורך הקטע OK ואת אורך המיתר CD באמצעות רדיוס המעגל R .

.119 (005 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד א)



במשולש שווה־שוקיים AMK $(AM = AK)$

KD הוא תיכון לשוק AM , ו־ ME הוא גובה לשוק AK .

א. הוכח: $\angle DAE = \angle DEA$.

ב. נתון גם: $MK = 2 \cdot DE$.

(1) מהו הגודל של $\angle MAK$? נמק.

(2) הוכח: $DE \parallel MK$.

(3) ME ו־ DK נחתכים בנקודה P .

מצא פי כמה גדול היקף המשולש MPK מהיקף המשולש EPD .

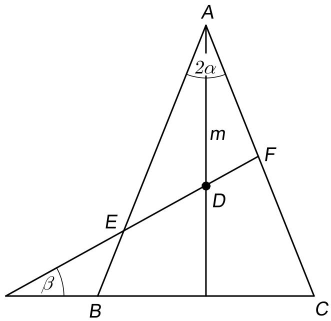
תשובות

.117 **ג.** $AD = 12_{cm}$

.118 **ג.** $CD = R\sqrt{3}$, $OK = \frac{1}{2}R$ (יחידות אורך)

.119 **ב.** **(1)** $\angle MAK = 60^{\circ}$ **(3)** פי שניים

טריגונומטריה במישור



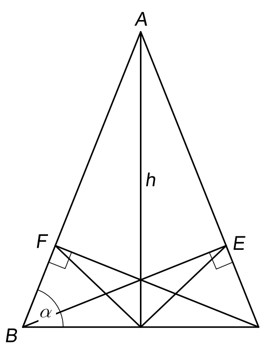
.1 (5 יח׳ , אביב תשכ״ז - 67)

במשולש שווה־שוקיים ABC (A - קדקוד זווית הראש)
שווה זווית הראש ל־ $2a$.
דרך הנקודה D , הנמצאת על גובה לבסיס במרחק m
מהקדקוד A ($DA = m$), העבירו ישר,
היוצר עם הישר BC זווית β , ישר זה חותך את שוקי המשולש הנ״ל בנקודות E ו־ F .
הבע את שטח המשולש AEF באמצעות a , m ו־ β .

.2 (5 יח׳ , קיץ תשכ״ז - 67)

א. משולש שווה־צלעות ומשושה משוכלל הם בעלי היקף שווה. חשב את יחס שטחיהם.

ב. חשב את יחס שטחיהם של מצולע משוכלל בן n צלעות ומצולע משוכלל בן $2n$ צלעות אשר היקפיהם שווים.

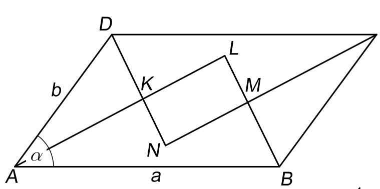


.3 (5 יח׳ , סתיו תשכ״ח - 67)

במשולש שווה־שוקיים ABC הורידו את שלושת הגבהים:
AD , BE ו־CF, זווית הבסיס במשולש הנ״ל שווה ל־α
והגובה על הבסיס הוא $AD = h$.

א. הוכח, כי שטח המשולש FDE הוא $\frac{h^2 ctg^2\alpha \sin 4\alpha}{2}$ –.

ב. באיזה תחום צריכה הזווית α להימצא שיהיה פתרון לבעיה?



.4 (5 יח׳ , סתיו תשכ״ט - 68)

במקבילית ABCD הצלעות הסמוכות הן a ו־ b ,
והזווית החדה ביניהן היא α .
AL , BL , CN ו־ DN הם חוצי הזוויות הפנימיות של המקבילית.
ארבעה חוצי־זוויות בהחתכם יוצרים מרובע KLMN .

א. הוכח, כי שטח המרובע KLMN שווה ל־ $\frac{1}{2}\cdot(a-b)^2 \sin\alpha$.

ב. מצא את המרחק KM .

תשובות

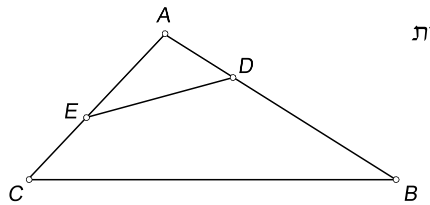
.1 $S = \frac{m^2 \sin 2\alpha \cos^2\beta}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$ (יחידות ריבועיות)

.2 א. $3:2$ **ב.** $\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$

.3 ב. $45^\circ < \alpha < 90^\circ$

.4 ב. $KM = a - b$ (יחידות אורך)

.100 (006 , קיץ ס"ח - 2008 - מועד א')



הנקודות D ו־ E במשולש ABC מונחות על הצלעות

AB ו־ AC בהתאמה.

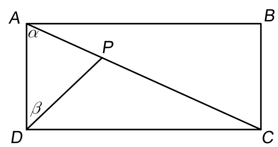
$\angle ADE = \angle C = \gamma \ , \ \angle AED = \angle B = \beta$

$BC = 5 cm \ , \ S_{BCED} = 4 cm^2$

הראה כי $DE = \sqrt{25 - 8(\frac{1}{tg\,\beta} + \frac{1}{tg\,\gamma})}\ cm$.

.101 (006 , חורף ס"ט - 2009)

נתון מלבן $ABCD$. האלכסון AC יוצר זווית α עם הצלע AD .



P היא נקודה על האלכסון AC , כך ש־ $\angle PDA = \beta$.

r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש APD .

R הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן $ABCD$.

הבע באמצעות α ו־ β את היחס:

א. $\frac{r}{R}$ **ב.** $\frac{S_{APD}}{S_{ABCD}}$

ג. נתון כי $\frac{S_{APD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$. הוכח: $\alpha = \beta$.

מארק גנסון (Mark Ganson) גילה את המספר הראשוני הבא, ובו 515 ספרות, כולן 2 ו־ 9 לסירוגין:

9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
9292929292929292929292929292929292929292929292929292
929292929292929

תשובות

.101 **א.** $\frac{r}{R} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ **ב.** $\frac{S_{\triangle APD}}{S_{ABCD}} = \frac{\cos\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

חשבון דיפרנציאלי

חקירת פונקציות - רציונליות

בשאלות 1-68 בפרק זה, הדרישה היא לחקירת פונקציה לפי השלבים:

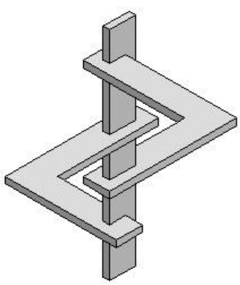
א. תחום הגדרה **ב.** חיתוך עם הצירים **ג.** נקודות קיצון וסוגן **ד.** תחומי עליה / ירידה

ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים **ו.** סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה

לא בכל השאלות במקור נדרשים כל הסעיפים לעיל. השאלות כאן מורחבות בחלק מהמקרים.

לנוחותכם, מובאים סעיפי החקירה בראש כל עמוד. הגרפים של הפונקציות נמצאים בעמ' 247-253.

הסימון: $\forall$ הוא סימון מתמטי מקצועי של: 'לכל'. '$\forall x$' - פירושו: לכל x (ממשי, במקרה שלנו).



1. (5 יח' , קיץ תשכ"ח - 68) $y=\frac{x}{x^2-x+1}$.

2. (5 יח' , סתיו תש"ל - 69 , אביב תשל"א - 71) $y=\frac{x^2-4x+1}{x^2+1}$.

3. (קיץ תשכ"ט - 69 , אביב תשל"ב - 72) $y=\frac{32x}{(x^2+3)^2}$.

4. (5 יח' , חורף תש"ל - 70) $y=\frac{1}{x^2-1}$.

5. (5 יח' , קיץ תש"ל - 70) $y=\frac{x^2}{x^2-4}$.

6. (5 יח' , סתיו תשל"א - 70) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

תשובות

1. **א.** $\forall x$ **ב.** $(0,0)$ **ג.** $min(-1,-\frac{1}{3})\ ,\ max(1,1)$

ד. $\nearrow:\ -1<x<1\ ,\ \searrow:\ (x<-1)\cup(x>1)$ **ה.** $y=0$ **ו.** עמ' 142

2. **א.** $\forall x$ **ב.** $(0,1)\ ,\ (2\pm\sqrt{3}\ ,\ 0)$ **ג.** $min(1,-1)\ ,\ max(-1,3)$

ד. $\nearrow:\ (x<-1)\cup(x>1)\ ,\ \searrow:\ -1<x<1$ **ה.** $y=1$ **ו.** עמ' 142

3. **א.** $\forall x$ **ב.** $(0,0)$ **ג.** $min(-1,-2)\ ,\ max(1,2)$

ד. $\searrow:\ (x<-1)\cup(x>1)\ ,\ \nearrow:\ -1<x<1$ **ה.** $y=0$ **ו.** עמ' 142

4. **א.** $x\neq\pm1$ **ב.** $(0,-1)$ **ג.** $\emptyset$ **ד.** $\searrow:\ (0<x<1)\cup(1<x)\ ,\ \nearrow:\ (x<-1)\cup(-1<x<0)$

ה. $y=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=1$ **ו.** עמ' 142

5. **א.** $x\neq\pm2$ **ב.** $(0,0)$ **ג.** $\emptyset$ **ד.** $\searrow:\ (0<x<2)\cup(x>2)\ ,\ \nearrow:\ (-2<x<0)\cup(x<-2)$

ה. $y=1\ ,\ x=\pm2$ **ו.** עמ' 142

6. **א.** $x\neq\pm2$ **ב.** $(0,0)$ **ג.** $min(\sqrt{12},3\sqrt{3})\ ,\ max(-\sqrt{12},-3\sqrt{3})$

ד. $\searrow;\ (-\sqrt{12}<x<-2)\cup(-2<x<2)\cup(2<x<\sqrt{12})\ ,\ \nearrow:\ (x<-\sqrt{12})\cup(x>\sqrt{12})$

ה. $x=\pm2$ **ו.** עמ' 142

46. (006 , קיץ תש"ע - 2010 , מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+a}$, a הוא פרמטר.

הפונקציה אינה מוגדרת עבור ערך <u>אחד</u> של x .

א. מצא את הערך של a.

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים הבאים:

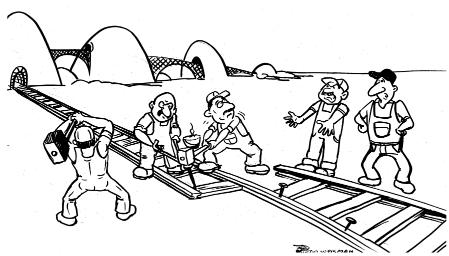
ב. מצא עבור $f(x)$ את: **(1)** האסימפטוטות המקבילות לצירים

(2) נקודות חיתוך גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש) **(3)** תחומי העליה והירידה

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. **(1)** מצא את האסימפטוטות של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ המקבילות לצירים

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.



תא פוֹצֶלְיֶר (Paucelier)

במכונת קיטור ממירים תנועה מעגלית של גלגל לתנועה של קו ישר בתוך גליל.

מערכת כזאת הומצאה בשנת 1864 על־ידי פוֹצֶלְיֶר (Paucelier), סֶגֶן בצבא הצרפתי.

בציור מעוין בתוך דלתון.

אורכי צלעות הדלתון והמעוין קבועים.

שתי הנקודות השחורות קבועות.

שאר ארבע הנקודות - נעות.

כשקצה הרדיוס בציור נע על המעגל,

בתחום שבו הדלתון מוגדר,

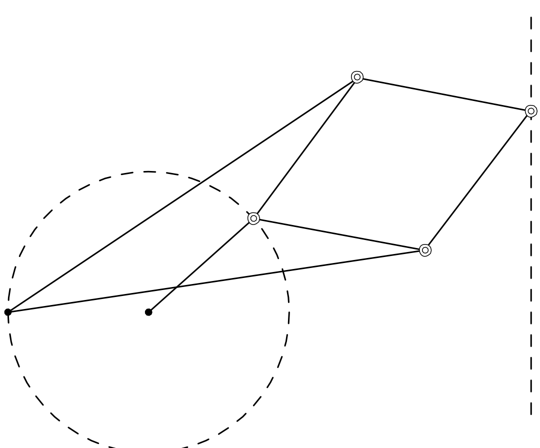
הוא מניע את צלעות הדלתון והמעוין.

הקדקוד הימני העליון של המעוין מצייר

קו ישר כמתואר בציור.

היופי המתמטי כאן הוא שרטוט קו ישר,

ללא שימוש בסרגל.



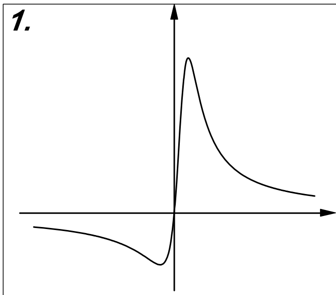
תשובות

46. **א.** $a=9$ **ב.** **(1)** $x=3\ ,\ y=1$ **(2)** $(0,1\frac{1}{3})$ **(3)** $\nearrow:\ -3.5<x<3$, $\searrow:\ (x<-3.5)\cup(x>3)$

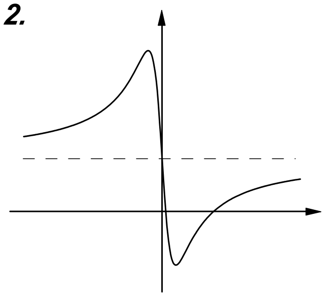
ב. **(4)** עמ' 144 **ג.** **(1)** $x=3\ ,\ y=0$ **(2)** עמ' 144

תשובות

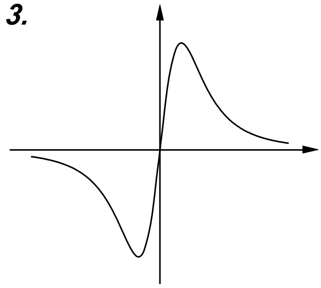
1.



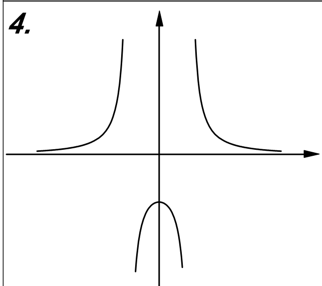
2.



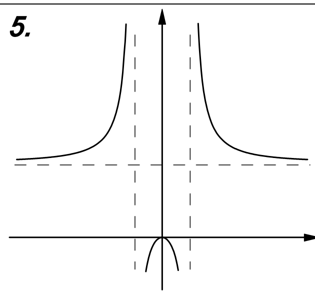
3.



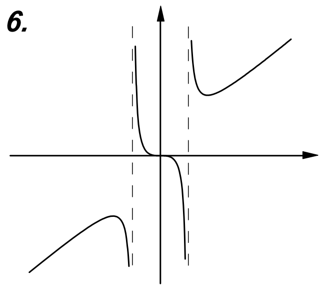
4.



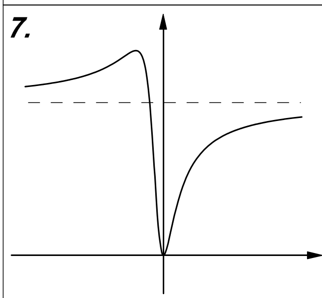
5.



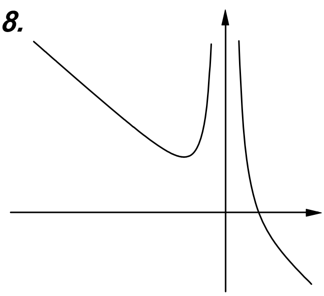
6.



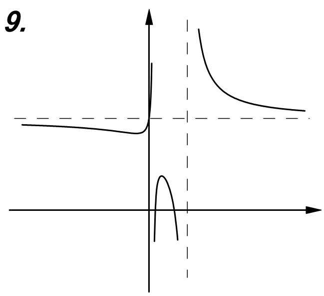
7.



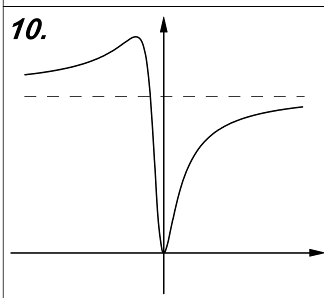
8.



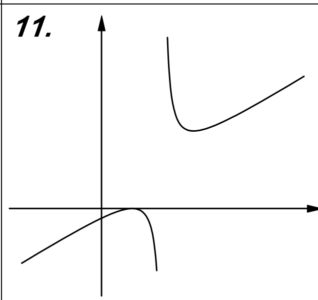
9.



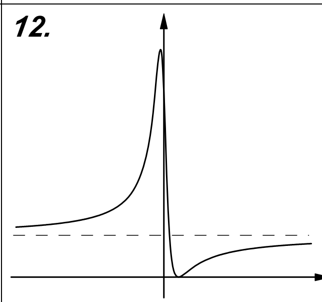
10.



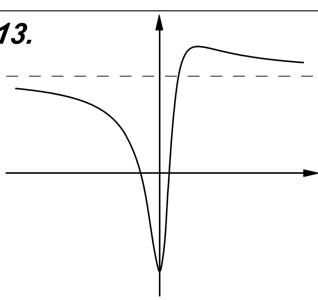
11.



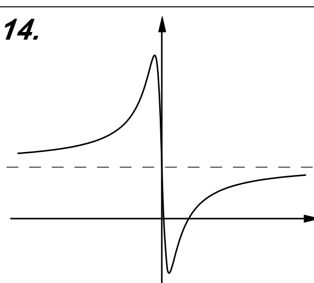
12.



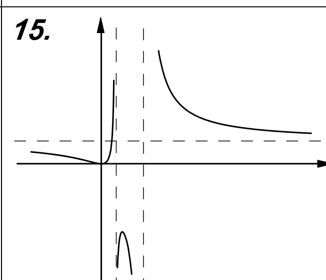
13.



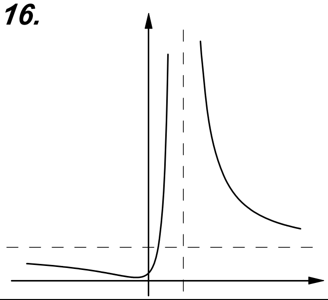
14.

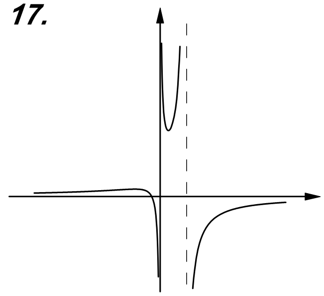


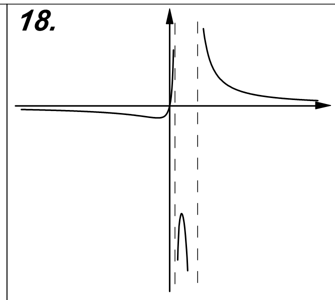
15.

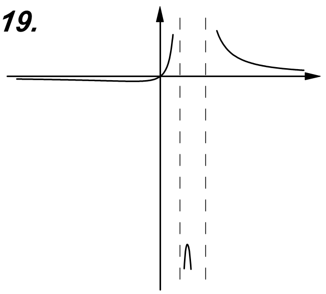


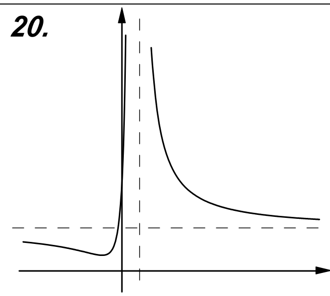
תשובות

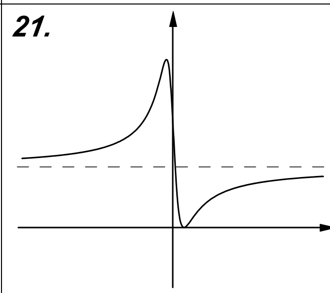
16.


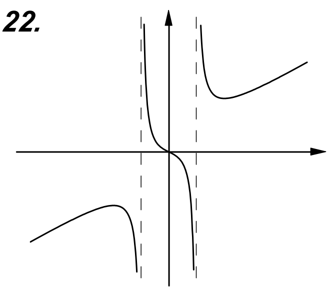
17.


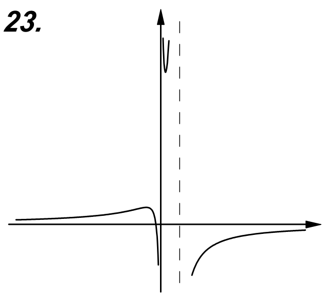
18.


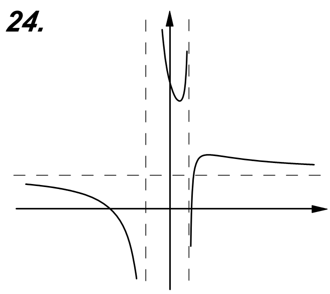
19.


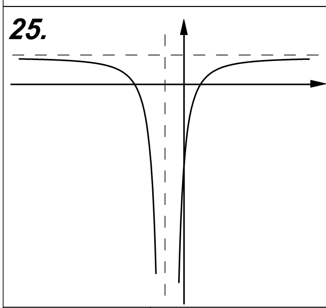
20.


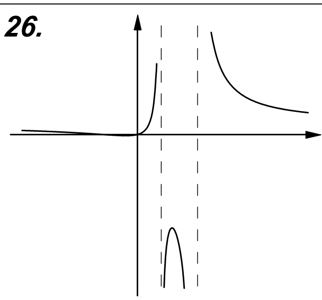
21.


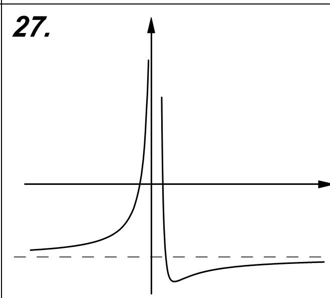
22.


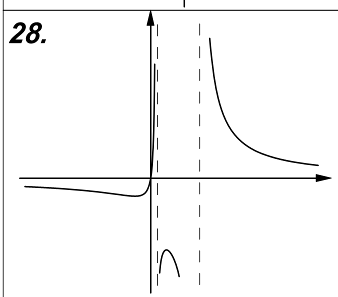
23.


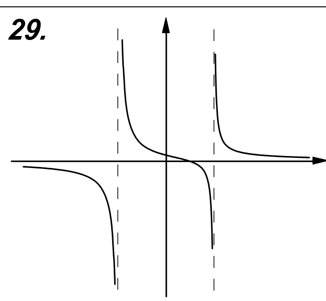
24.


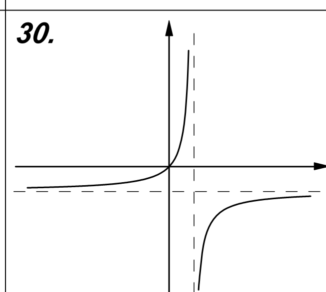
25.


26.


27.


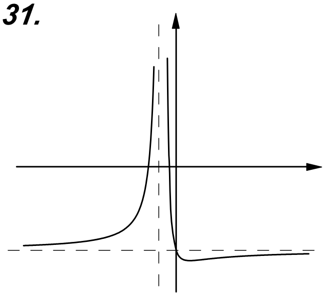
28.


29.


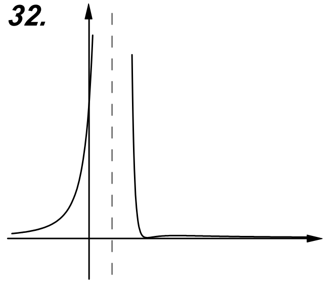
30.


תשובות

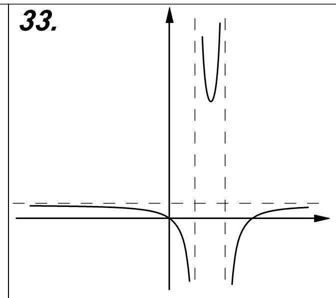
31.



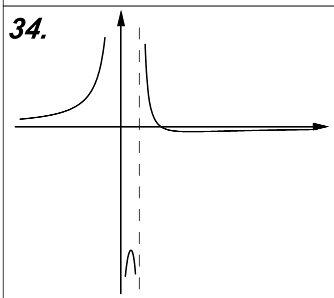
32.



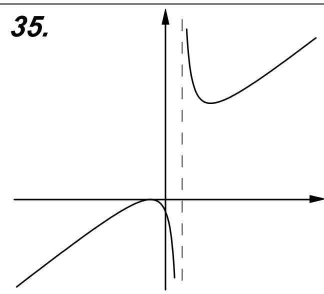
33.



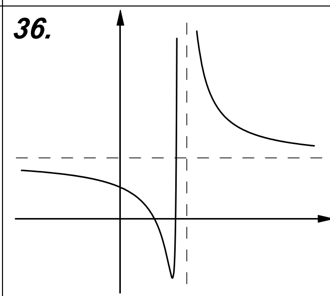
34.



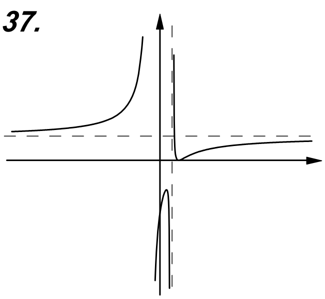
35.



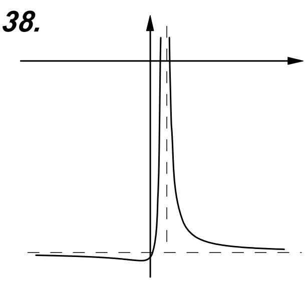
36.



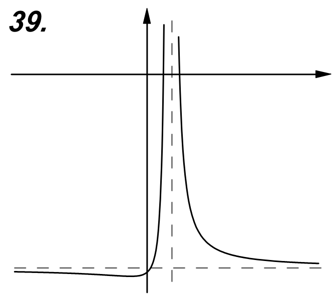
37.



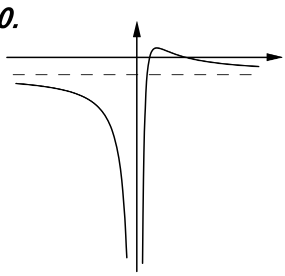
38.



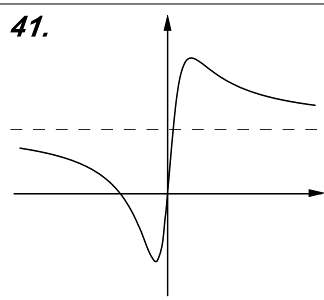
39.



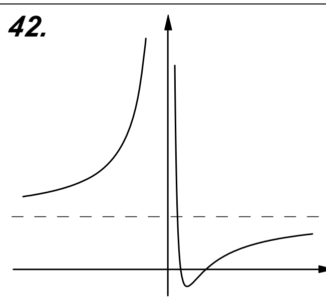
40.



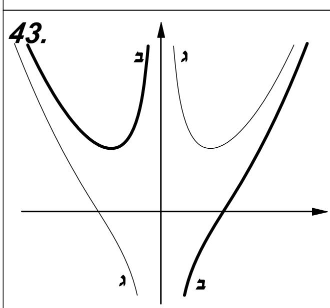
41.



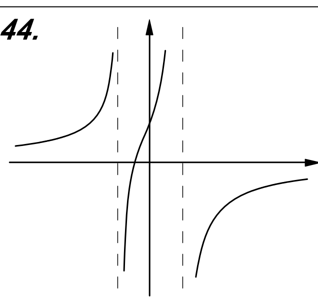
42.



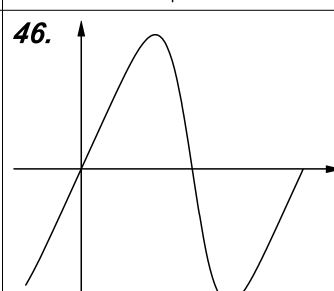
43.



44.



46.



<u>חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות - עם שורש ריבועי</u>

1. (5 יח׳ , אביב תש״ל - 70)

נתונה הפונקציה: $y=\frac{1}{8}x\sqrt{64-x^2}$.

חקור את הפונקציה: **א.** תחום הגדרה **ב.** נקודות קיצון וסוגן

ג. תחומי עליה וירידה **ד.** נקודות חיתוך עם הצירים **ה.** שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה

2. (5 יח׳ , חורף תשל״ג - 73)

נתונה הפונקציה: $y=x\sqrt{1-x^2}$.

חקור את הפונקציה: **א.** תחום הגדרה **ב.** נקודות חיתוך עם הצירים

ג. נקודות קיצון וסוגן **ד.** תחומי עליה וירידה **ה.** שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה

3. (5 יח׳ , קיץ תשל״ד - 74)

נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{x(9-x^2)}$.

חקור את הפונקציה: **א.** תחום הגדרה **ב.** נקודות קיצון וסוגן

ג. תחומי עליה וירידה **ד.** נקודות חיתוך עם הצירים **ה.** שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה

4. (5 יח׳ , סתיו תשל״ו - 75)

נתונה הפונקציה: $y=\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.

חקור את הפונקציה: **א.** תחום הגדרה **ב.** נקודות חיתוך עם הצירים

ג. נקודות קיצון וסוגן **ד.** אסימפטוטות מקבילות לצירים **ה.** תחומי עליה וירידה

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה

תשובות

1. **א.** $-8\le x\le 8$ **ב.** $max_{ep}(-8,0)$, $min(-4\sqrt{2},-4)$, $max(4\sqrt{2},4)$, $min_{ep}(8,0)$ **ה.** עמ׳ 149

ד. $(-8,0)$, $(8,0)$, $(0,0)$ **ג.** $\searrow:\ (4\sqrt{2}<x<8)\cup(-8<x<-4\sqrt{2})$, $\nearrow:\ -4\sqrt{2}<x<4\sqrt{2}$

2. **א.** $-1\le x\le 1$ **ב.** $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$ **ה.** עמ׳ 149 **ג.** $max(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$, $min(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$

$max_{ep}(-1,0)$, $min_{ep}(1,0)$ **ד.** $\searrow:\ (\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1)\cup(-1<x<-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\nearrow:\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

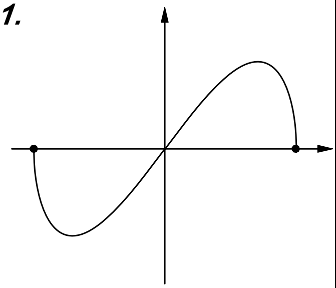
3. **א.** $(x\le -3)\cup(0\le x\le 3)$ **ב.** $max(\sqrt{3},\sqrt{6\sqrt{3}})$, $min_{ep}(\pm3,0)$, $min_{ep}(0,0)$ **ה.** עמ׳ 149

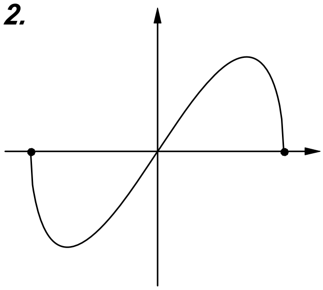
ג. $\nearrow:\ 0<x<\sqrt{3}$, $\searrow:\ (x<-3)\cup(\sqrt{3}<x<3)$ **ד.** $(0,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,0)$

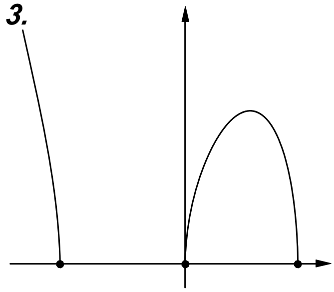
4. **א.** $(0\le x<1)\cup(x>1)$ **ב.** $(0,0)$ **ג.** $max(4,-4)$, $min_{ep}(0,0)$ **ד.** $x=1$

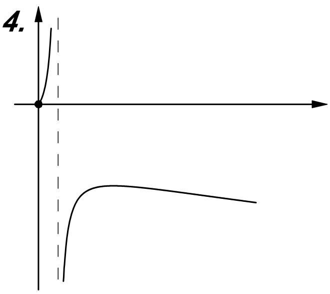
ה. $\searrow:\ x>4$, $\nearrow:\ (0<x<4)\cup(0<x<1)$ **ו.** עמ׳ 149

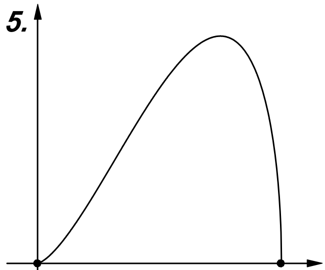
תשובות

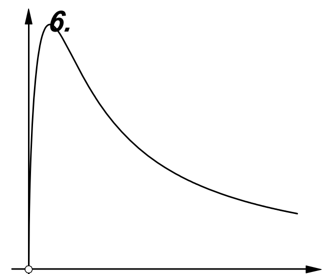
1.


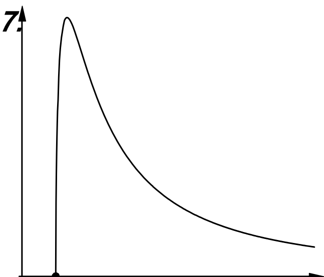
2.


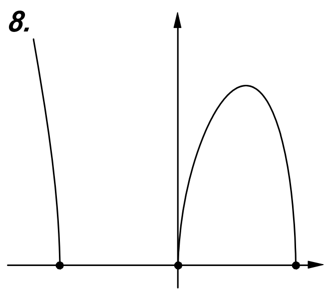
3.


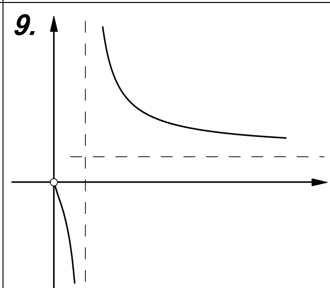
4.


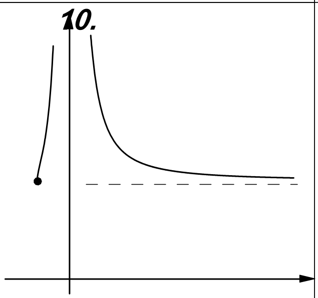
5.


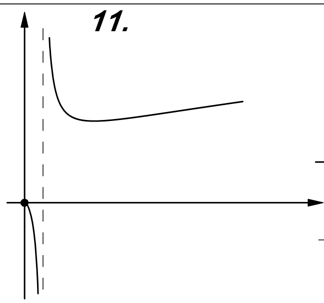
6.


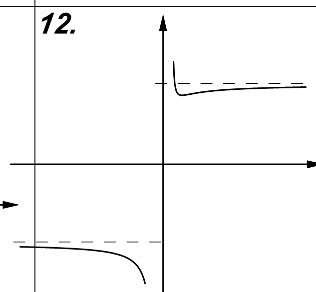
7.


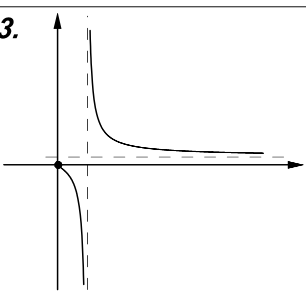
8.


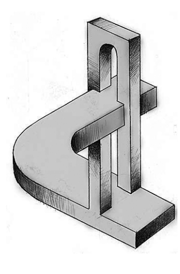
9.


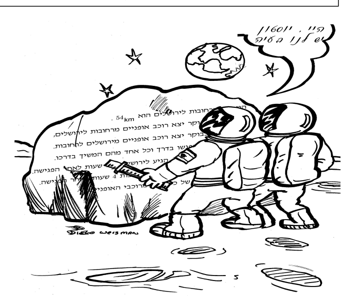
10.


11.


12.


13.






חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות - פונקציות טריגונומטריות

1. (5 יח׳ , אביב תשכ״ט - 69)

נתונה הפונקציה: $y = \sin x \sin 2x$.

א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?

ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. באיזה תחום עולה הפונקציה ובאיזה תחום היא יורדת?

ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x ובאיזו נקודה - את ציר y?

ה. שרטט על־סמך הסעיפים א׳ - ד׳ סקיצה של גרף הפונקציה.

2. (5 יח׳ , חורף תשל״א - 71)

נתונה הפונקציה: $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}$.

א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?

ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

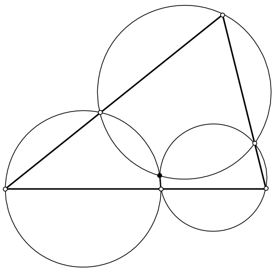
ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \le x \le 2\pi$ עולה הפונקציה, ובאילו היא יורדת?

ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את הצירים x ו־y בתחום הנ״ל?

ה. שרטט על־סמך הסעיפים א׳-ד׳ סקיצה של גרף הפונקציה.

משפט מיקואל

על כל צלע של משולש כלשהו נבחר נקודה כלשהי.
נשרטט שלושה מעגלים, כך שכל מעגל עובר דרך קדקוד המשולש ודרך שתי נקודות סמוכות לו שסימנו.
משפט מיקואל אומר שלשלושת המעגלים יש נקודה משותפת.
נקרא על שם מתמטיקה צרפתי **Auguste Miquel** שחי במאה ה־ 19 .



תשובות

1. א. $\forall x$ **ד.** $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\pi,0)$, $(\frac{3}{2}\pi,0)$ **ה.** עמ׳ 156

ב. $min_{ep.}(0,0)$, $max(0.96, \frac{4}{9}\sqrt{3})$, $min(2.19, -\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $max(\pi,0)$
$min(4.1, -\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $max(5.33, \frac{4}{9}\sqrt{3})$, $min_{ep.}(2\pi,0)$

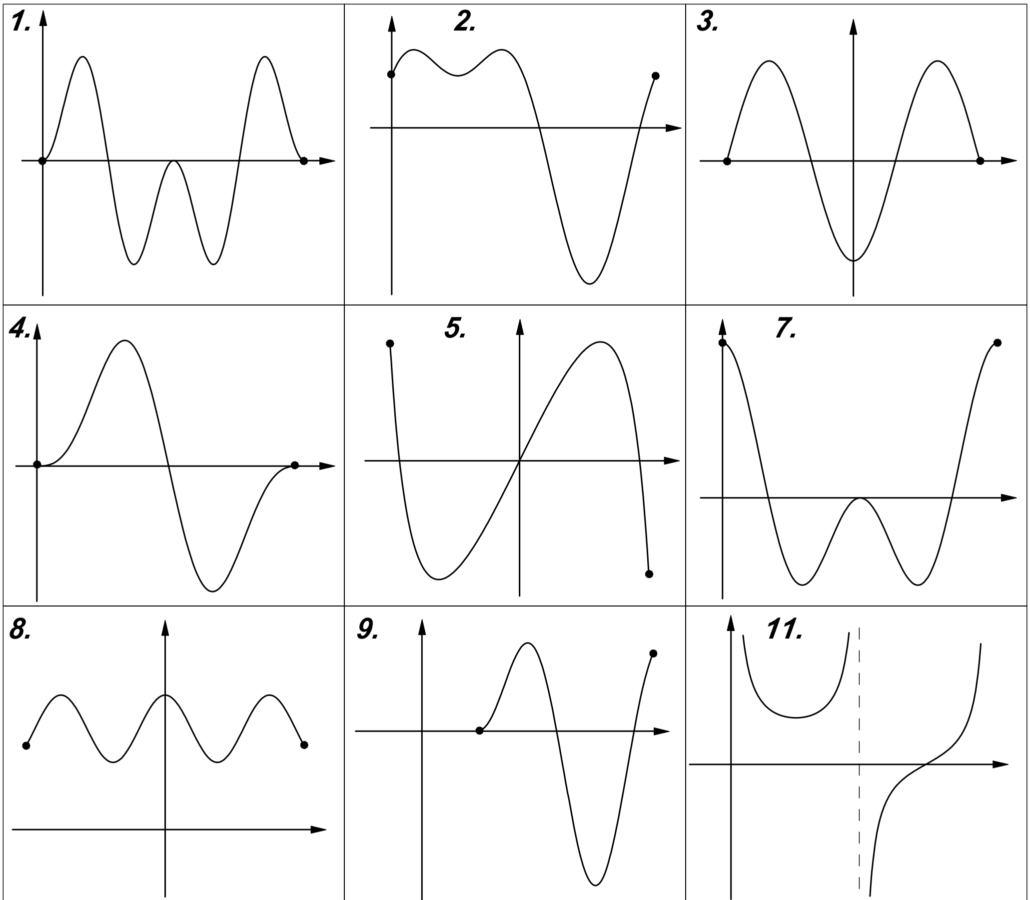
ג. $\nearrow: \ (4.1 < x < 5.33) \cup (2.19 < x < \pi) \cup (0 < x < 0.96)$
$\searrow: \ (5.33 < x < 2\pi) \cup (\pi < x < 4.1) \cup (0.96 < x < 2.19)$

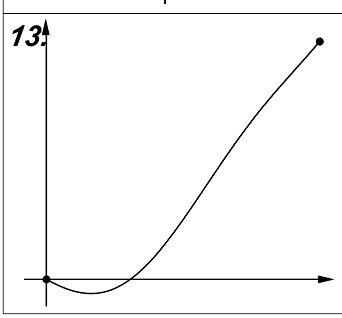
2. א. $\forall x$ **ב.** $min_{ep.}(0,2)$, $max(\frac{\pi}{6}, 2\frac{1}{4})$, $min(\frac{\pi}{2},2)$, $max(\frac{5}{6}\pi, 2\frac{1}{4})$, $min(\frac{3}{2}\pi,0)$, $max_{ep.}(2\pi,2)$

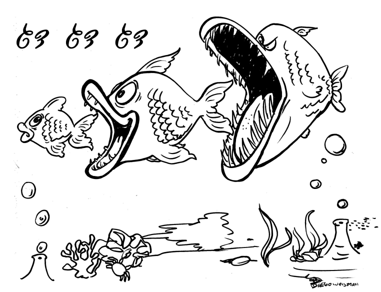
ד. $(0,2)$, $(\frac{3}{2}\pi,0)$ **ה.** עמ׳ 156

ג. $\searrow: \ (\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2})$, $\nearrow: \ (\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{6})$

תשובות







השערת רימן

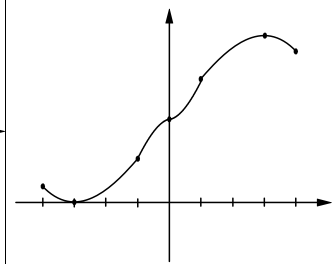
השאלה המתאגרת ביותר היום במתמטיקה היא ההוכחה של 'השערת רימן', על שם המתמטיקאי הגרמני **גיאורג פרידריך רימן** (Georg Friedrich Bernhard Riemenn , 1826–1866) שהעלה אותה, והיא עוסקת בפיזורם של המספרים הראשוניים. הבנת הבעיה עצמה דורש ידע מתמטי מעמיק מכדי להעלותה במסגרת זו.

יש למעלה מ־500 מאמרים מתמטיים שתלויים בה.

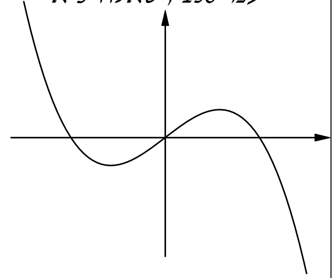
כל המאמרים האלו מתחילים במשפט: "אם השערת רימן נכונה . . .".

תשובות

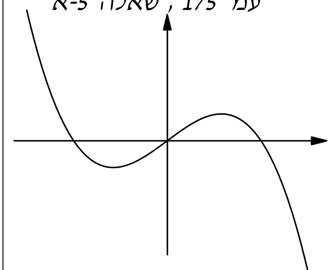
עמ' 158 , שאלה 3-ב(2)



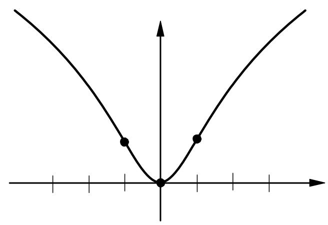
עמ' 158 , שאלה 3-א



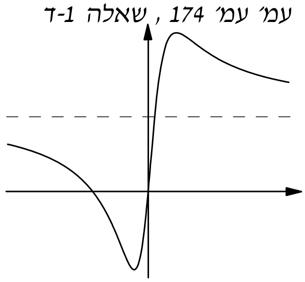
עמ' 175 , שאלה 5-א



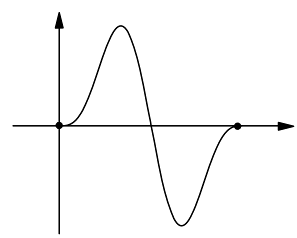
עמ' 174 , שאלה 2-א



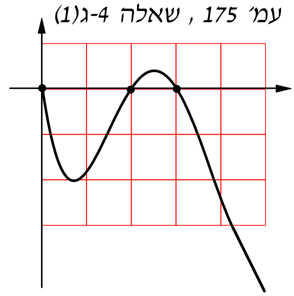
עמ' עמ' 174 , שאלה 1-ד



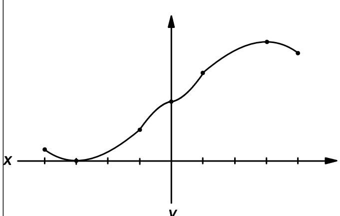
עמ' 176 , שאלה 5-ב(1)



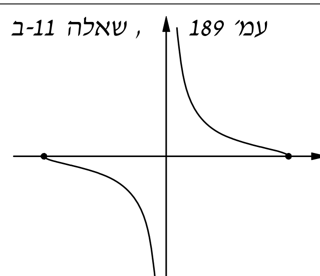
עמ' 175 , שאלה 4-ג(1)



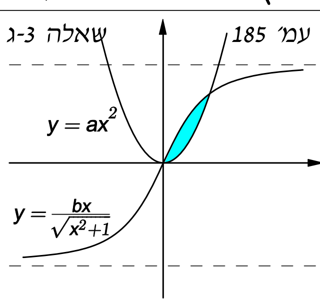
עמ' 175 , שאלה 3-ב(2)



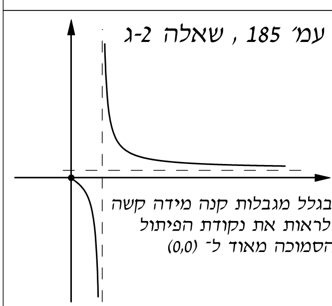
עמ' 189 , שאלה 11-ב



עמ' 185 שאלה 3-ג



עמ' 185 , שאלה 2-ג



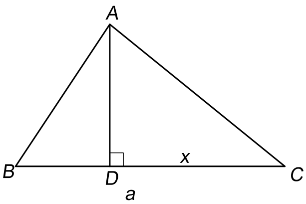
בורות עיתונאית

ב- 9.7.1996 הופיעה כתבה בעיתון ***'הארץ'*** *שקוננה על מיעוט השערים שהובקעו באליפות המונדיאל באותה שנה, שבה זכתה צרפת. נבחרת צרפת היתה צריכה לכבוש רק 8 שערים בכל המונדיאל, ממוצע של 1.14 שערים למשחק כדי לזכות באליפות. כל יבול השערים באותו מונדיאל היה נמוך באופן משמעותי לעומת התחרויות הקודמות. כותב המאמר חישב ומצא שכמות השערים באותו מונדיאל היתה נמוכה ב-* ***234%*** *(! ! !) מממוצע השערים של תחרויות המונדיאל בעשרים השנים האחרונות, מה שאומר שמספר השערים שהובקעו היה שלילי . . .*

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון - בעיות כלליות

.1 (5 יח׳ , חורף תשכ״ט - 69)

מכל המשולשים שווי־השוקיים ששטחם S איזהו בעל ההיקף המינימלי?

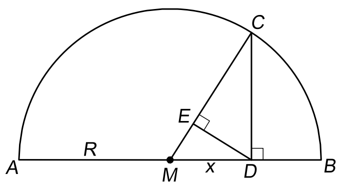


.2 (5 יח׳ , חורף תש״ל - 70)

בין כל המשולשים שבסיסם a ושטחם S ,

איזהו בעל ההיקף המינימלי? (הצב: $DC = x$.)

.3 (5 יח׳ , סתיו תשל״א - 70)



על הקטע $AB = 2R$ כעל קוטר בנו חצי מעגל שמרכזו M .

מימין למרכז M בוחרים על הקוטר נקודה D

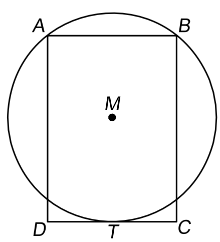
ומעמידים בה אנך ל־ AB , החותך את חצי המעגל

בנקודה C .

מנקודה D מורידים אנך לרדיוס MC , אנך זה חותך את הרדיוס בנקודה E .

מה צריך להיות אורך הקטע MD כדי ששטח המשולש CED יהיה מקסימלי?

.4 (5 יח׳ , סתיו תשל״ב - 71)



במעגל שמרכזו M ורדיוסו R העבירו מיתר AB המקביל למשיק למעגל זה בנקודה נתונה T . אנכים המורדים מנקודות A ו־ B על המשיק הנ״ל חותכים אותו בנקודות C ו־ D .

א. מה צריך להיות אורך המיתר AB ,
כדי שהיקף המלבן $ABCD$ יהיה מקסימלי?

ב. מצא את ההיקף המקסימלי.

.5 (5 יח׳ , אביב תשל״ד - 74)

בין כל גזרות העיגול, ששטחן הוא S (ממעגלים בעלי רדיוסים שונים),

איזו היא הגיזרה שהיקפה הוא מינימלי?

מצא את הרדיוס שלה ואת זוויתה המרכזית ברדיאנים.

היום אתה המבוגר ביותר שהיית והצעיר ביותר שתהיה.

תשובות

.1 משולש שווה־צלעות

.2 משולש שווה־שוקיים

.3 $MD = \frac{R}{2}$ (יחידות אורך)

.4 **א.** $AB = 0.8\sqrt{5}R$ **ב.** $2R(1+\sqrt{5})$ (יחידות אורך)

.5 $R = \sqrt{S}$ (יחידות אורך) , $\alpha = 2_{rad.}$

בעיות ערך קיצון - גרפים

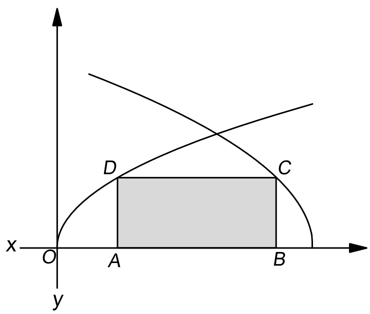
1. (5 יח' , קיץ תש"ל - 70)

נתונה פונקציה $y = x\sqrt{x}$ ונקודה $A(3, 3\sqrt{3})$ על גרף פונקציה זו.

מצא על גרף הפונקציה הנתונה נקודה B , המונחת בין ראשית הצירים ובין הנקודה A ,

כך ששטח המשולש OAB יהיה מקסימלי (שרטט את גרף הפונקציה הנתונה).

2. (5 יח' , אביב תשל"ג - 73)



מלבן $ABCD$ חסום בגרפים של הפונקציות:

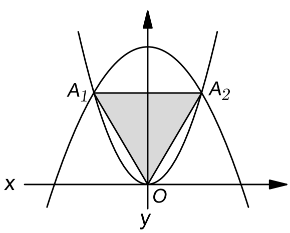
$y = \sqrt{3x}$, $y = +\sqrt{40 - 5x}$ ובציר x .

א. סמן ב־ x את הקטע OA (O - ראשית הצירים),

והבע את שטח המלבן $ABCD$ כפונקציה של x .

ב. מה הערך של x , כאשר שטח המלבן הוא מקסימלי?

3. (5 יח' , קיץ תשל"ג - 73)



הנקודה O היא ראשית הצירים.

הפרבולות $y = -x^2 + 4$ ו־ $y = ax^2$ $(a > 0)$

נחתכות בנקודות A_1 ו־ A_2 .

מה צריך להיות הערך של a כדי ששטח המשולש A_1OA_2 יהיה מקסימלי?

4. (5 יח' , קיץ תשמ"א - 81)

באיזה תחום נמצא a , אם נתון שמבין נקודות הפרבולה $y = ax^2$,

הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $A(0, \frac{1}{2})$ היא הראשית $(0,0)$?

5. (5 יח' , חורף תשמ"ז - 86)

על העקום $y = \frac{a^2}{x}$ $(a \neq 0)$ בחרו נקודה ברביע הראשון והעבירו דרכה את המשיק לעקום.

מהי נקודת ההשקה, אם אורך היתר של המשולש הנ"ל הינו מינימלי?

חמשת הימים הראשונים שאחרי שבת - הם הקשים ביותר

תשובות

1. $B(\frac{4}{3}, \frac{8}{9}\sqrt{3})$

2. **א.** $S = (8 - 1.6x)\sqrt{3x}$ (יחידות ריבועיות) **ב.** $x = 1\frac{2}{3}$

3. $a = 2$

4. $a < 1$

5. (a, a)

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון - טריגונומטריה

.1 (5 יח׳ , קיץ תשכ״ח - 68)

מתוך עיגול בעל רדיוס R חתכו גיזרה בעלת זווית מרכזית $\angle AMB = \alpha$.

בתוך הגיזרה חסמו מלבן $DEFG$

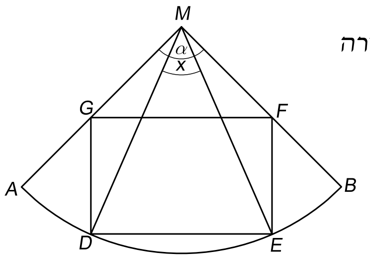
באופן ששניים מקדקודיו D ו־ E נמצאים על קשת הגיזרה

והקדקודים G ו־ F נמצאים כל אחד על רדיוס הגיזרה.

DE מקביל למיתר AB של הגיזרה. מה צריכה

להיות הזווית המרכזית המתאימה ל־ DE (x) ,

כדי ששטח המלבן $DEFG$ יהיה מקסימלי?



.2 (5 יח׳ , חורף תשל״ג - 73)

במעגל בעל רדיוס R יש לחסום משולש ABC שבו $\angle BAC = \alpha$.

מה צריכים להיות אורכי הצלעות AB ו־ AC כדי שסכומן יהיה מקסימלי?

הדרכה: קח אחת הזוויות הנותרות במשולש ABC כמשתנה x .

.3 (5 יח׳ , קיץ תשל״ד - 74)

במעגל בעל רדיוס R חסמו זווית היקפות α .

מה צריכים להיות אורכי המיתרים, הכולאים את הזווית α , כדי שסכומם יהיה מקסימלי?

.4 (5 יח׳ , סתיו תשל״ה - 74)

בין כל המשולשים, שהם ישרי־זווית ובעלי יתר c , מהו המשולש,

אשר רדיוס המעגל החסום בו הוא הגדול ביותר? מצא את זוויותיו של משולש זה.

.5 (4-5 יח׳ , אביב תשל״ה - 75) השוקיים והבסיס הקטן בטרפז הם בני a_{cm} כל אחד.

מה צריכה להיות הזווית, שעל־יד הבסיס הגדול, כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

.6 (5 יח׳ , חורף תשל״ז - 77)

היחס בין רדיוס המעגל החסום במשולש לבין רדיוס המעגל החוסם משולש זה

הוא: $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$.

עבור איזה ערך של α יהיה יחס זה גדול ביותר?

תשובות

.1 $x = \frac{\alpha}{2}$

.2 $AB = AC = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$ (יחידות אורך)

.3 $2R\cos\frac{\alpha}{2}$, $2R\cos\frac{\alpha}{2}$ (יחידות אורך)

.4 45° , 45° , 90°

.5 60°

.6 $\alpha = 45^\circ$

<u>הקשר בין גרף הנגזרת לפונקציה</u> (כל השאלות משאלון 006)

1. (קיץ תשס"ה - 2005 , מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+8}$, a פרמטר.

גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

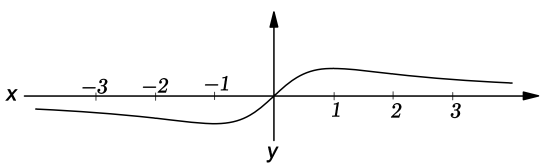
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הפונקציה הנתונה היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ (כלומר: $g'(x)=f(x)$).

מצא את תחומי העליה והירידה של $g(x)$. נמק.

2. (קיץ תשס"ז - 2007 , מועד ב)

א. בציור להלן מסורטטת סקיצה של הגרף של פונקצית הנגזרת $g'(x)$:

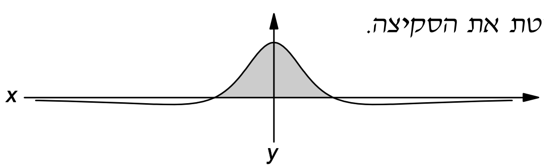


על סמך ציור זה בלבד, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם נתון ש- $g(0)=0$.

סמן בסקיצה את שיעורי x של נקודות הפיתול של $g(x)$.

הסבר את השיקולים שעל פיהם סרטטת את הסקיצה.

ב. בציור להלן מסורטטת סקיצה של הגרף של $g''(x)$:



חשב את השטח הכלוא בין הגרף של $g''(x)$ ובין ציר x, אם נתון כי $g'(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

מי שמדבר איתך על אחרים - מדבר עם אחרים עליך

תשובות

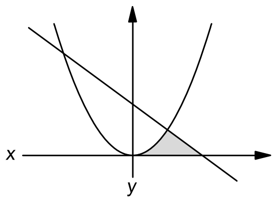
1. **א.** $a=8$ **ב.** $\min: (-2,-1)$, $\max: (4,2)$ **ג.** $(0,0)$, $(-8,0)$ **ד.** עמ' 157

ה. $\searrow (g): -8<x<0$, $\nearrow (g): (x<-8)\cup(x>0)$

2. **א.** עמ' 157 **ב.** $S=1$ (יחידה ריבועית אחת)

חשבון אינטגרלי

שטחים - פולינומים



.1 (5 יח׳ , חורף תשכ״ח - 68)

מצא את השטח האפור המוגבל בישר $3x+2y-6=0$,

בעקומה $y=\frac{3}{2}x^2$ ובציר x .

.2 (5 יח׳ , אביב תשכ״ח - 68)

מצא את השטח המוגבל בעקומות $y=1-x^2$ ו־ $y=x^3+1$.

.3 (5 יח׳ , קיץ תשכ״ח - 68)

מצא את השטח המוגבל ע״י העקומה $y=2x^3+x^2-2x-1$

וקטע ציר x בין הנקודות $A(0,0)$ ו־ $B(1,0)$.

.4 (5 יח׳ , קיץ תשכ״ח - 68)

מצא את השטח המוגבל ע״י העקומה $y=2x^3+x^2-2x-1$

וקטע ציר x בין הנקודות $A(0,0)$ ו־ $B(1,0)$.

.5 (5 יח׳ , חורף תשל״א - 71)

נתונה הפרבולה $y=\frac{1}{2}x^2+x$ והישר $y=x+c$ $(c>0)$.

א. הבע את השטח המוגבל בישר ובפרבולה הנ״ל באמצעות c .

ב. מה צריך להיות הערך של c כדי שהשטח, שנתבקשת למצוא בסעיף א׳, יהיה שווה ל־ $21\frac{1}{3}$?

.6 (5 יח׳ , קיץ תשל״א - 71)

מצא את השטח המוגבל ע״י הגרפים של הפונקציות: $y=x+2$ ו־ $y=x^3-3x+2$.

שרטט את הגרפים.

.7 (5 יח׳ , חורף תשל״ב - 72) מצא את השטח המוגבל בפרבולה $y=4-x^2$ ובישרים $y=-\frac{1}{2}x-1$ ו־ $y=\frac{1}{2}x-1$. שרטט את הגרפים של הפונקציות המגבילות את השטח.

תשובות

.1 $S=1\frac{1}{4}$ (יחידות ריבועיות)

.2 $S=\frac{1}{12}$ (יחידות ריבועיות)

.3 $S=\frac{1}{3}$ (יחידות ריבועיות)

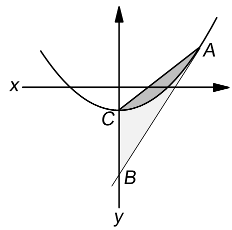
.4 $S=2\frac{2}{3}$ (יחידות ריבועיות)

.5 $S=13\frac{1}{3}$ (יחידות ריבועיות)

.6 $S=8$ (יחידות ריבועיות) , עמ׳ 184

.7 $S=12\frac{2}{3}$ (יחידות ריבועיות) , עמ׳ 184

35. (שאלון 006 , חורף תשס״ה - 2005)



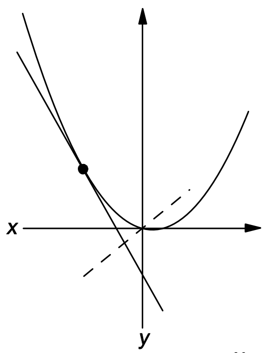
גרף הפרבולה $y = x^2 - 1$ חותך את ציר y בנקודה C.

ישר משיק לפרבולה בנקודה A, חותך את ציר y בנקודה B.

גרף הפרבולה מחלק את שטח המשולש ABC לשני שטחים.

חשב את היחס בין השטח העליון (הכהה) ובין השטח התחתון (הבהיר).

36. (שאלון 006 , חורף תשס״ז - 2007)



נתונה הפרבולה $y = 2x^2 - x$.

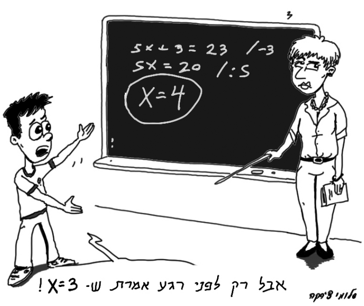
בנקודה על הפרבולה שבה $y = 6$ מעבירים ישר משיק ששיפועו שלילי.

א. מצא את משוואת הישר המשיק.

ב. דרך ראשית הצירים מעבירים ישר המחלק לשני שטחים שווים את השטח המוגבל ע״י הפרבולה, ע״י הישר המשיק וע״י ציר y .

הישר חותך את הישר המשיק שמצאת בסעיף א בנקודה שבה $x = a$.

מצא את ערכו של a.



כולנו מכירים את השלָשָה הפיתגורית של מספרים עוקבים: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

זו השלשה הפיתגורית היחידה של מספרים עוקבים. ובכל זאת, היא אינה מקרית.

שלָשָה זו, היא חלק ממשפחת אינסופית של סכומים ריבועים של מספרים עוקבים:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 34^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$(2n^2 + n)^2 + \ ...\ + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + \ ...\ (2n^2 + 3n)^2$$

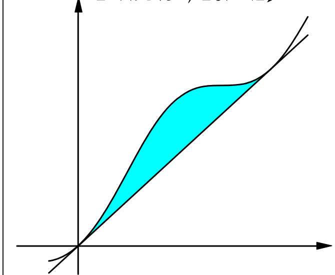
תשובות

35. $1 : 2$

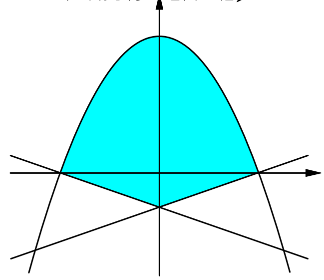
36. א. $y = -7x - 4\frac{1}{2}$ **ב.** $a = -\frac{1}{2}$

תשובות

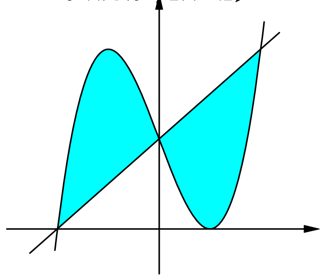
עמ' 187 , שאלה 1



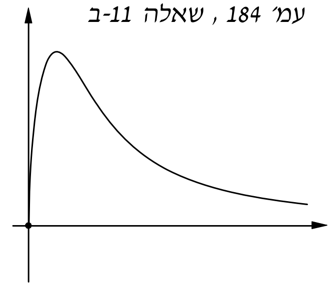
עמ' 177 , שאלה 7



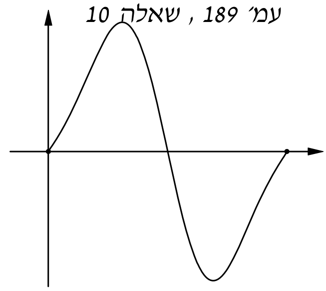
עמ' 177 , שאלה 6

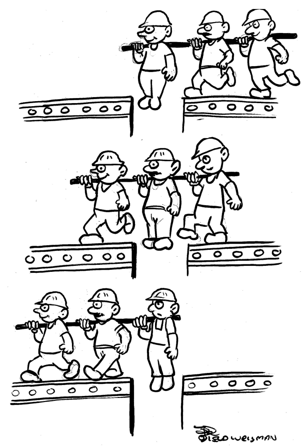


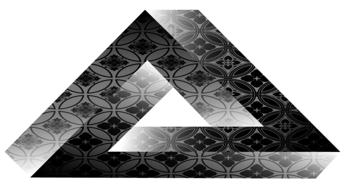
עמ' 184 , שאלה 11-ב



עמ' 189 , שאלה 10







אז זהו, שלא

על השאלות שבהן אנו נדרשים למצוא את האיבר בסדרה שבה נתנוים איבריה הראשונים,

ניתן לענות תשובות רבות - כמעט ככל שנחפוץ.

הביטו למשל בסדרות הבאות. מהו האיבר הבא בכל אחת מהן?

לא ניתן לענות תשובה מהו האיבר החמישי בכל אחת מהסדרות להלן:

$(1)\ \ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \qquad (2)\ \ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots \qquad (3)\ \ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \qquad (4)\ \ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$

ברור שהתשובות המצופות הן: $(1)\ 0 \quad (2)\ 1 \quad (3)\ 5 \quad (4)\ 16$

אבל זה ממש לא מוכרח. הנה לכם נימוק מדוע בכל אחת מהסדרות, האיבר הבא הוא π:

$$(1)\quad a_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\pi \quad\Rightarrow\quad 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \pi\ ,\ \ldots$$

$$(2)\quad a_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-1)}{24}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \quad\Rightarrow\quad 1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ \pi\ \ldots$$

$$(3)\quad a_n=\frac{n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-5)}{24} \quad\Rightarrow\quad 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \pi\ ,\ \ldots$$

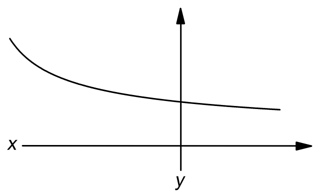
$$(4)\quad a_n=2^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-16)}{24} \quad\Rightarrow\quad 1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ \pi\ ,\ \ldots$$

הנה עוד דוגמה: מה האיבר הבא בסדרה $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$. **אז זה ממש לא חייב להיות** 9 **(הצפוי).**

זה יכול להיות, למשל $217,341$. **איך? הנה, כך:**

$$a_n=\frac{18,111}{2}n^4-90,555n^3+\frac{633,885}{2}n^2-452,773n+217331 \quad\Rightarrow\quad 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 217341,\ \ldots$$

חשבון אינטגרלי - שטחים - שורשים ריבועיים במכנה



.1 (5 יח׳ , קיץ תשנ״ט - 99) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+6}}$.

א. דרך ראשית הצירים העבירו משיק לגרף הפונקציה.

מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה הנתונה,

ע״י המשיק שמצאת, וע״י ציר y .

.2 (שאלון 006 , קיץ תשס״ו - 2006 , מועד א)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

א. הראה כי הפונקציה עולה לכל x .

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הֶעבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה הפונקציה חותכת את ציר x .

(1) הראה כי המשיק אינו חותך את הפונקציה בנקודות נוספות.

(2) המשיק נפגש עם הישר $y=1$ בנקודה A . מנקודה A העבירו אנך לציר x .

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, ועל ידי האנך מ־ A .

.3 (שאלון 006 , קיץ תשס״ז - 2007 , מועד א)

נתונות שתי פונקציות: $f(x)=ax^2$ $(a>0)$ ו־ $g(x)=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$ $(b>0)$.

א. מצא תחומי עליה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. הבע באמצעות b אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$ המקבילות לצירים.

ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת,

סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. אחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא ב־ $x=1$, והשטח המוגבל

על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הוא $\frac{5}{3}-\sqrt{2}$.

חשב את ערכי הפרמטרים a ו־ b .

תשובות

.1 א. $y=-\frac{\sqrt{2}}{8}x$ **ב.** $S=2\sqrt{6}-3\sqrt{2}=0.66$ (יחידות ריבועיות)

.2 ב. $y=\pm 1$ **ג.** עמ׳ 157 **ד. (2)** $S=4.5-3\sqrt{2}=0.2574$ (יחידות ריבועיות)

.3 א. $\nearrow: \forall x$ **ב.** $y_{\rightarrow}=b$, $y_{\leftarrow}=-b$ **ג.** עמ׳ 157 **ד.** $a=1$, $b=\sqrt{2}$

חשבון אינטגרלי - שטחים - פונקציות רציונאליות

1. (שאלון 006 , קיץ תשס"ה - 2005 , מועד א)

נתונה הפונקציה $y = -\frac{4x^3+4x^2-15x-18}{2x+3}$ $(x \neq -\frac{3}{2})$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $y = 6$. למשיק יש שיפוע שלילי.

מצא את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר x.

2. (שאלון 006 , קיץ תשס"ה - 2005 , מועד ב)

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{-3x^2+35x-50}{3x-5}$ $(x \neq 1\frac{2}{3})$, $g(x) = 3x - 2$.

מנקודה שעל גרף הפונקציה $g(x)$ שבה $x = a$ מורידים אנך לציר x,

ומנקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ שבה $x = a + 2$ מורידים אנך נוסף לציר x $(1 < a < 3)$.

מצא את הערך של a שעבורו השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$,

על ידי הגרף של $g(x)$, על ידי האנכים ועל ידי ציר x הוא 12.5 (יחידות ריבועיות).

3. (שאלון 006 , קיץ תשס"ו - 2006 , מועד מיוחד)

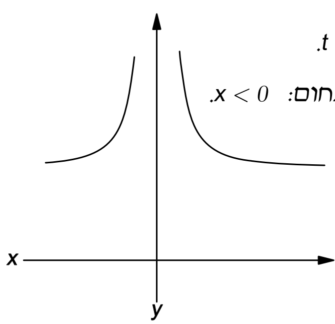
נתונה הפונקציה $y = \frac{5x^2+4}{x^2}$, ונתון הישר $y = -t\,x + 4\,t$, $t > 0$.

לישר ולפונקציה יש נקודת חיתוך אחת בלבד והיא נמצאת בתחום: $x < 0$.

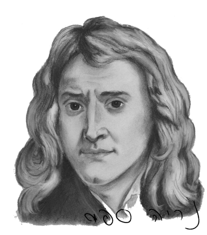
הישר מחלק לשני שטחים שווים את השטח המוגבל

ע"י גרף הפונקציה, ע"י הישרים $x = 1$ ו- $x = 4$ וע"י ציר x.

מצא את הערך של t.



אַיְזֶק נְיוּטוֹן



סֶר **אַיְזֶק נְיוּטוֹן** 1642–1727. פיזיקאי ומתמטיקאי אנגלי, מגדולי המדענים בכל הדורות ואחד משלושת גדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, לצידם של ארכימדס וגאוס. בן למשפחת איכרים. התייתם מאביו לפני שנולד. גדל אצל סבתו. גילה את כח הכבידה (גרוויטציה). פיתח את תורת האופטיקה. עבודתו הגדולה נקראת "עקרונות". פיתח את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי במקביל ללייבניץ.

בעבר למדו בתיכון (5 יחידות) את 'הבינום של ניוטון', אז זה הוא . . . ניוטון היה אדם סגור, חשדן ונזירי. נוצרי בעל אמונה עמוקה בקיומו של האל, ועם זאת - כופר באלהותו של אותו האיש.

תשובות

1. $S = 12\frac{3}{8}$ (י"ר) **2.** $a = 2\frac{1}{2}$ **3.** $t = 2$

חשבון אינטגרלי - שטחים - פונקציות טריגונומטריות

1. (5 יח׳ , סתיו תשכ״ט - 68)

שרטט את הגרפים של הפונקציות: $y = x$ ו־ $y = x + \sin^2 x$, וחשב את השטח המוגבל בגרפים שלהן, בין $(0,0)$ ונקודת המפגש הראשונה בין שני הגרפים ברביע הראשון.

2. (4 יח׳ , קיץ תש״ל - 70)

שרטט את הגרפים של הפונקציות: $y = \sin 2x$ ו־ $y = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$,

ומצא את השטח המוגבל בקשתות הגרפים הנ״ל שבין שתי נקודות

החיתוך שבתחום $0 < x \le \pi$ (שים לב שאין לוקחים בחשבון את הנקודה $x = 0$).

3. (5 יח׳ , קיץ תש״ל - 70)

נתונות הפונקציות: $y = 0.5x$ ו־ $y = 0.5x + \sin^2 x$.

לגרפים של פונקציות אלו נקודות השקה רבות. מצא את השטח המוגבל בחלקי שני הגרפים בין ראשית הצירים ובין נקודת המגע ברביע הראשון, הקרובה ביותר לראשית הצירים.

4. (5 יח׳ , סתיו תשל״א - 70)

גרף הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$ חותך את ציר x בנקודות שבהן $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$

ומחלק לשני חלקים שווים את השטח המוגבל בגרף הפונקציה $y = \sin x$

בין אותן שתי הנקודות ובציר x . מצא את ערכי הפרמטרים a , b ו־ c .

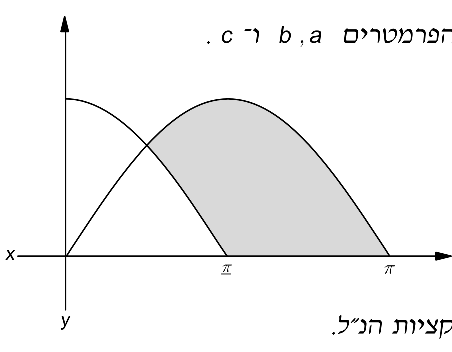
5. (5 יח׳ , חורף תשל״ז - 77)

בציור מתואר גרף הפונקציה $y = \cos x$

בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

וגרף הפונקציה $y = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

מצא את השטח המוגבל בציר x ובגרפים של הפונקציות הנ״ל.



> *Yesterday is history, tomorrow is a mystery.*
> *Today is a gift, that's why it's called the present.*

תשובות

1. $S = \frac{\pi}{2}$ (יחידות ריבועיות) , עמ׳ 184

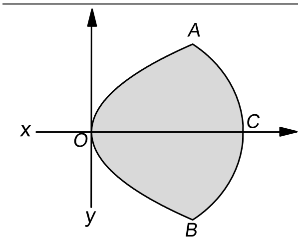
2. $S = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\pi - 1 = 2.33$ (יחידות ריבועיות)

3. $S = \frac{\pi}{2}$ (יחידות ריבועיות)

4. $a = -\frac{6}{\pi^3}$, $b = \frac{6}{\pi^2}$, $c = 0$

5. $S = \sqrt{2}$ (יחידות ריבועיות)

חשבון אינטגרלי - נפח גוף סיבוב



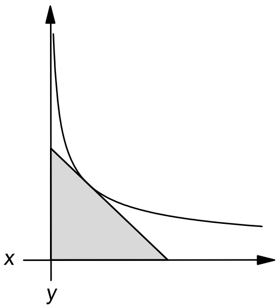
1. (5 יח׳ , חורף תש״ל - 70) למעגל $(x-1)^2+y^2=25$

ולפרבולה $y^2=2px$ ישנו מיתר משותף הנמצא על הישר $x=4$.

א. מצא את p.

ב. השטח האפור, המוגבל בקשת AOB של הפרבולה ובקשת ACB

של המעגל הנ״ל מסתובב סביב ציר x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר על־ידי סיבוב זה.



2. (5 יח׳ , קיץ תשל״א - 71) נתונה הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

משיק לגרף הפונקציה הנתונה יוצר עם צירי השיעורים משולש.

משולש זה יוצר ע״י סיבוב סביב ציר x חרוט.

הוכח, כי נפח החרוט הנ״ל איננו תלוי בנקודת הגרף שבה העבירו

את המשיק (ז״א הנפח הוא גודל קבוע).

3. (4-5 יח׳ , קיץ תשל״ד - 74) מצא את נפח גוף הסיבוב, הנוצר ע״י סיבוב השטח המוגבל

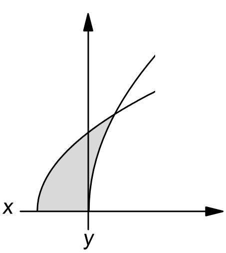
בעקומה $y^2=x^3$ ובישר $x=4$, סביב ציר x.

4. (5 יח׳ , אביב תשל״ה - 75) מצא את הנפח של הכדור בעל רדיוס R ע״י חישוב הנפח של גוף הסיבוב,

הנוצר הודות לסיבוב חצי עיגול, שבין קשת המעגל $x^2+y^2=R^2$ לבין ציר x , סביב ציר x .

5. (5 יח׳ , חורף תשל״ו - 76) הקטע של הפרבולה $y^2=x-1$, הכלוא בין הישרים $x=1$ ו־ $x=4$,

מסתובב סביב ציר x ונוצרת כוס. מצא את נפח הכוס.



6. (5 יח׳ , חורף תש״ם - 80) מצא את נפח גוף הסיבוב הנוצר ע״י סיבוב

השטח המוגבל ע״י הגרפים של הפונקציות $y=\sqrt{4+2x}$ ו־ $y=\sqrt{6x}$

וע״י ציר x סביב ציר x .

7. (5 יח׳ , חורף תשמ״ז - 86) העקום $y=x^2+ax-\frac{1}{4}$, המוגבל בין הישרים $x=0$ ו־ $y=1$,

מסתובב סביב ציר x . עבור איזה ערך של a הגוף המתקבל הוא נפח מינימלי?

תשובות

1. **א.** $p=2$ **ב.** $V=49\frac{1}{3}\pi$ (יחידות קוב)

2. $V=2\frac{1}{4}\pi$ (יחידות קוב)

3. $V=64\pi$ (יחידות קוב)

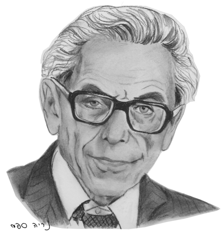
4. $V=\frac{4^3}{3}$ (יחידות קוב)

5. $V=4.5\pi$ (יחידות קוב)

6. $V=6\pi$ (יחידות קוב)

7. $a=-\frac{3}{8}$

פול אֶרדֶש – סיפורו של נזיר מתמטי



***פול ארדש**, יהודי הונגרי, 1913-1996, עילוי מתמטי. שני הוריו היו מורים למתמטיקה. בגיל שלוש כבר הכפיל בע"פ מספרים בני שלוש ספרות. אז גם גילה את קיומם של המספרים השליליים. בגיל 21 קיבל תואר ד"ר במתמטיקה מאוניברסיטת בודפשט. היה חבר בסגל המתמטי במנצ'סטר, אנגליה. עם פרוץ מלחמת העולם השניה היגר לארה"ב, המקום הבטוח ליהודים באותה עת.*

ארדש הקדיש את כל חייו למתמטיקה עד כדי איבוד ענין בכל תענוגות העולם. גם כשמת, בגיל 83, 1996, היה זה עת עמל על משוואה. ארדש היה רווק, צרך גלולות קפאין, אספרסו ואפילו אמפטינים (סוג של סם) ע"מ להגביר את יכולתו האינטלקטואלית. הוא היה חסר רכוש כלשהו מכיון שלדבריו 'נכסים הם מטרד'. לא היה לו בית, מכונית או חשבון בנק. היתה לו מזוודה קטנה, בה ארז את כל מלבושיו. כל מלבושיו היו ממשי בגלל רגישותו הפיזית למגע כלשהו. את ידיו רחץ עשרות פעמים ביום.

ארדש היה הדמות הקלאסית של הפרופסור המפוזר. הוא היה חותך פירות עם החלק הקהה של הסכין ומלכלך את סביבתו. בגיל 21 מרח בפעם הראשונה חמאה על פרוסת לחם בעצמו. עד אז היו עושות לו זאת אמו או המשרתת. רק בגיל 11 שרך לראשונה את נעליו בעצמו, ועדיין התקשה בקשירת שרוכי נעליו. לא פעם נעזר לשם כך בחבריו. היתה לו הליכה מוזרה, כשל קוף. גבו היה כפוף וזרועותיו מתנפנפות. הליכתו היתה מהירה מאוד. לעיתים היה רץ לעבר קיר, נעצר מולו בפתאומיות, מסתובב ורץ חזרה. פעם החמיץ את עצירתו מול הקיר, פגע בו ונפגע. לא פעם איבד את דרכו. הוא איבד את ראייתו באחת מעיניו מכיון שסרב לקבל טיפול רפואי מחשש לאיבוד הזמן שבו עסק במתמטיקה. רק לאחר התעקשותם של אחד מידידיו המתמטיקאים ואשתו הסכים לניתוח השתלת קרנית. מתמטיקאי מממפיס הוזעק לחדר הניתוח על מנת שארדש יוכל לשוחח איתו בנושאים מתמטיים בזמן הניתוח. כשהחלים מהתקף לב שוכן בבית חולים עם חדר גדול על מנת להכיל את כל מבקריו. ארדש ניהל בחדרו שלוש שיחות מתמטיות בעת ובעונה אחת, בשלוש שפות, עם שלוש קבוצות שונות ששהו בחדרו: בהונגרית, בגרמנית ובאנגלית. במעמד זה דרש מהרופאים שבאו לבודקו לחזור רק לאחר מספר שעות. הם נענו לו. הוא ניהל התכתבות ענפה עם מתמטיקאים רבים בעולם. תחילת מכתב טיפוסי שלו: "הואה (מתמטיקאי סיני) היקר, נניח ש- p הוא מספר ראשוני אי זוגי . . . "

בשנות החמישים, בתקופה בה רדפו בארה"ב את אוהדי הקומוניזם ('מקארתיזם', ע"ש הסנטור מקארטי), התעמת עם פקידים אמריקאים שתיחקרו אותו על דעותיו בנושא. כשהביע דעה ניטרלית, תוך ציון ערכו של קארל מרקס, נשללה ממנו אשרת הכניסה לארה"ב. את סוף שנות החמישים העביר בישראל.

הוא התקיים מהרצאות במתמטיקה, אותן הירצה ברחבי העולם. בביקוריו בחו"ל התאכסן אצל מתמטיקאים מקומיים. את דמי האירוח שילם בהברקותיו המתמטיות. ארדש השפיע לא מעט על המתמטיקה של המאה העשרים. הוא גילה את המספרים הדיסקרטיים, שהם הבסיס למדעי המחשב. היה אשף בתורת המספרים ובכללי המספרים הראשוניים.

פעם הוא ראה על הלוח בעיה באנליזה פונקציונאלית (ענף מתמטי), תחום שארדש לא ידע עליו מאומה. הוא קרא את המשפט המתמטי הקשור בבעיה זו, שאל מספר שאלות על הסימונים המתמטיים שבבעיה, ואז ללא כל מאמץ כתב פתרון בן שתי שורות. על הבעיה הזו עבדו קודם לכן שני אנליסטים וחיברו לה פתרון שאורכו 30 עמודים(!).

הוא כתב לבדו, או עם שותפים למעלה מ-$1,500$ מאמרים. כפותר חידות מעולה (ולא כמחבר תיאוריות), הוא זכה במספר גדול של פרסים, ביניהם מהנחשבים ביותר כמו פרס קול וולף (המוענק בישראל). כשבעיה הטרידה אותו הוא היה מוכן להציע עבודה הרבה כסף למי שיראה לו את פתרונה. ארדש היה כל כך מוערך מבחינה מקצועית אצל המתמטיקאים, עד כי התפתח ביניהם דירוג של מי שהשתתף איתו בכתיבת מאמר. מי שכתב איתו מאמר קיבל דירוג של 'ארדש ראשון'. מי שפרסם מאמר עם מישהו שפרסם מאמר עם ארדש קיבל את הדירוג 'ארדש 2'. כ-$4,500$ מתמטיקאים הם בעלי דירוג 'ארדש 2', ביניהם אלברט איינשטיין. הדירוג מגיע היום עד 'ארדש 7'. למי שמעולם לא פירסם מאמר מתמטי כלשהו יש 'ארדש ∞'.

סיווג שאלות המבחנים – חלק א

*סוגריים מרובעים – מספר העמוד, שאר המספרים – מספרי השאלות. את הסיווג הכין **שרון חיים**.*

בעיות מילוליות

בעיות תנועה [1]

- רכב/הלך אחד (או יותר) בהלוך
4, 5, 7, 11, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 25, 27, 28, 30, 31, 32, 35, 37
- שני רכבים/הלכים הנעים אחד מול השני
1, 2, 3, 6, 8, 9, 12, 13, 17, 23, 24, 26, 33, 34, 36
- מסלול עגול
16
- שייט עם/נגד כיוון הזרם
10, 21
- אי-שוויון
18, 35, 37
- הבעה באמצעות פרמטר
10, 37
- עם אחוזים
33, 36
- משפט פיתגורס
29, 38

בעיות הספק [12]

- כללי
1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10
- עם אחוזים
7, 8, 11
- אי-שוויון והבעה באמצעות פרמטר
9

סדרה חשבונית [16]

- נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
2, 10, 11, 12, 17, 31
- הוכחת סדרה חשבונית ו/או תכונותיה
1, 2, 4, 6, 7, 14, 18, 32, 33, 35
- סדרה יורדת/עולה
22
- איברים עוקבים
2, 18
- איבר אמצעי
14
- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
14, 19, 23, 32, 34, 35
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
3, 11, 22, 24, 36
- סימנים מתחלפים/היפוך סימנים
7, 19, 34
- סדרה בת 2n איברים
7, 20, 28, 35
- סדרה בת 3n איברים
20, 21
- סכום איברים אחרונים
28
- שתי סדרות (a_n,b_n)
33
- סדרות מתלכדות
22
- סדרת ההפרשים/הפרשי איברים וסדרות
5, 8
- חלוקה לקבוצות
1, 4, 6, 10
- ערך מוחלט
7, 19
- איבר המסתיים בספרה מסוימת
31
- חלוקה במספר טבעי
36
- מחיקת איברים
13, 27, 35
- הבעה באמצעות פרמטר
19, 23, 27

- בעיות מעשיות
  - כללי
9, 30
  - גאומטריה
15, 16
  - קנייה ומכירה
29, 38
  - עבודה
25
  - תנועה
26, 37

סדרה הנדסית [26]

- נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
3, 8
- הוכחת סדרה הנדסית ו/או תכונותיה
1, 2, 4
- איברים עוקבים
7
- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
11
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
6, 14
- סימנים מתחלפים/היפוך סימנים
6
- סדרה בת 2n איברים
11
- סכום איברים אחרונים
6
- שתי סדרות (a_n,b_n)
10, 13
- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
7, 10, 13, 14
- הבעה באמצעות פרמטר
9, 13, 14
- בעיות מעשיות
  - עבודה
9, 12

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת [30]

- הוכחת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
1
- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
5, 6, 8
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
1, 3, 7
- שתי סדרות (a_n,b_n)
2
- סכום ריבועי האיברים
6, 9
- עם סדרה חשבונית
9
- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
1, 4, 6, 7
- הבעה באמצעות פרמטר
3, 4, 7

סדרות המוגדרות לפי כלל נסיגה[35]

- כסדרה חשבונית
2, 5, 8, 17
- כסדרה הנדסית
3, 4, 5, 9, 12, 14, 16, 19
- כסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
14
- סדרה חשבונית/הנדסית כהפרש של שני איברים
13, 18
- שתי סדרות
9, 12, 14, 15, 16, 17, 19
- מקומות זוגיים/אי-זוגיים
2, 3, 8, 11, 13, 14, 18
- איברים עוקבים
5, 10
- סימנים מתחלפים/היפוך סימנים
4
- עם פרמטר
2, 5, 6, 8, 11, 15, 16, 17, 19

הסתברות - מיון לפי פרקי הלימוד [40]

עקרונות בסיסיים של חיתוך ואיחוד מאורעות,
הסתברות מותנית ללא טבלה

5, 6, 8, 10, 11, 13, 17, 20, 21, 24, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 40, 43, 44, 49, 59, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 79, 81, 83, 84, 88, 89, 92, 93, 94, 95

התפלגות בינומית (נוסחת ברנולי)

- שימוש בנוסחת ברנולי בלבד
1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25, 28, 29, 34, 39, 41, 42, 45, 46, 48, 50, 51, 52, 65, 82, 85
- חישוב מדויק
1, 2, 3, 7, 9, 12, 15, 16, 18, 22, 23, 25, 28, 29, 30b, 33b, 34, 41, 42, 46, 51, 65, 82
- חישוב לכל הפחות
1, 2, 3, 4, 7, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 28, 34, 39, 41, 42, 45, 46, 48, 50, 52, 85
- חישוב לכל היותר
1, 2, 4, 14, 16, 19

תרשים עץ (ניתן לפתור גם ללא שימוש בתרשים)

26, 27, 31, 38, 47, 57, 64, 70, 71, 86, 90

טבלה דו-ממדית

53, 54, 55, 56, 58, 61, 62, 67, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 80, 87, 91, 96, 97

הבעה באמצעות פרמטר

40, 83, 89, 93

הסתברות - נושאים שונים [40]

- כדורים וכדים
17, 27, 31, 33, 34, 35, 40, 49, 57, 64, 69, 70, 81, 84, 86, 92
- הצלחה/כשלון במבחני בי"ס
22, 24, 28, 44, 45, 52, 53, 61, 77, 85, 87
- מבחן רב-ברירה
68, 79
- סיכויי קבלה
45, 52, 71, 73, 75, 78, 85
- לידת בן/בת
2, 9, 25, 51
- הטלת קוביה
19, 26, 29, 30, 88
- הטלת מטבע
65
- קליעה למטרה
5, 8, 11, 38
- משחקים ופרסים
13, 21, 66, 83

טריגונומטריה במישור - ללא מעגל [105]

ללא פרמטר

46, 61, 64, 89

עם פרמטר

1, 2, 3, 4, 9, 11, 12, 24, 27, 28, 29, 41, 44, 45, 47, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 60, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 78a, 79, 81a, 86, 92, 94a, 95, 98a-b, 100

משולשים

- משולש
12, 48, 52, 56, 57, 60, 64, 65, 68, 94a, 100
- משולש קהה-זווית
79,
- משולש ישר-זווית
9, 45, 47, 73
- משולש שווה-שוקיים
1, 3, 11, 24, 29, 46, 66, 86, 92
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים
67
- משולש שווה-צלעות
2, 11, 41, 49, 70, 76
- משולש שווה-צלעות חסום במשולש שווה-צלעות
44, 72

נקודות וקווים מיוחדים במשולש

- נקודת מפגש חוצי הזוויות במשולש
70, 81a
- נקודת מפגש הגבהים במשולש
75
- תיכון
47, 52, 60
- תיכון ליתר
52
- חוצה-זווית
4, 41, 47, 48, 65, 66, 67, 79, 89
- חוצה-זווית חיצונית
12

מרובעים

- מקבילית
4
- מעוין
98a-b
- ריבוע
61
- טרפז
89, 95
- טרפז ישר-זווית
27
- טרפז שווה-שוקיים
11, 28, 53, 69, 71
- שטח מרובע
45

נושאים שונים

- משושה משוכלל
2
- מצולע משוכלל
2
- הסבר משמעות גאומטרית
29, 44, 49, 53

אם נעלה בריבוע את ספרותיו של מספר שלם, נסכום את שתי התוצאות,
ונחזור על הפעולות האלה עם המספר שהתקבל שוב ושוב, אזי התהליך יסתיים במספר 1
או בסדרה אינסופית שנבנה מחזורי ו־4 הוא המספר הקטן ביותר שלה.

$$38 \underset{9+64}{\rightarrow} 73 \underset{49+9}{\rightarrow} 58 \underset{25+64}{\rightarrow} 89 \underset{72+81}{\rightarrow} 145 \underset{1+16+25\,...}{\rightarrow} 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89$$

$$\rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89\,...$$

$$72 \rightarrow 53 \rightarrow 34 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145\,...$$

$$7 \rightarrow 49 \rightarrow 97 \rightarrow 130 \rightarrow 10 \rightarrow 1$$

טריגונומטריה במישור - עם מעגל [105]

ללא פרמטר

51, 54, 59, 63, 77, 82, 85, 90

עם פרמטר

5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 50, 55, 58, 62, 74, 78, 80, 81, 83, 84, 87, 88, 91, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 101

משולשים

- משולש

34

- משולש שווה-שוקיים

20, 99

נקודות וקווים מיוחדים במשולש

- תיכון

82, 90

- חוצה-זווית

6, 21, 39, 59

- נקודת מפגש חוצי-הזוויות במשולש

14, 81

- נקודת מפגש הגבהים במשולש שווה-שוקיים

5, 13

- קטע אמצעים בטרפז

25

מרובעים

- מעוין

98

- טרפז

91

מעגל

- חישובים במעגל

43, 94

- משיק למעגל

16, 23, 33, 83, 87, 91

מעגל חסום וחסום במשולש/מרובע

- מעגל חסום משולש

6, 14, 21, 39, 81, 97

ישר-זווית

10

שווה-שוקיים

5, 13, 16, 17

- מעגל חסום במשולש שווה-שוקיים

18

- מעגל חסום משולש וגם חסום במשולש

83

שווה-שוקיים

18

- מעגל חסום מרובע

7, 36, 54

מלבן

101

טרפז שווה-שוקיים

17, 31

- מעגל חסום במרובע

19

טרפז שווה-שוקיים

25

רדיוס מעגל

19, 23, 33, 34, 35, 84, 96

רדיוס מעגל חוסם וחסום במשולש/מרובע

- רדיוס מעגל חוסם משולש

22, 58, 59, 85, 98, 101

ישר-זווית

88

שווה-שוקיים

15, 18, 55, 74, 82, 87, 90

שווה-צלעות

26

- רדיוס מעגל חסום במשולש שווה-שוקיים

50

- רדיוס מעגל חוסם וגם חסום במשולש

62, 78

ישר-זווית

32, 38, 51, 77

שווה-שוקיים

8, 30, 37, 93

- רדיוס מעגל חוסם מרובע

40, 63

מלבן

101

טרפז שווה-שוקיים

42, 80

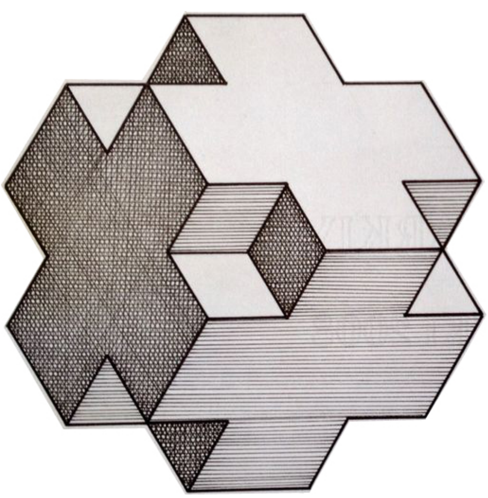
- רדיוס מעגל חסום במרובע טרפז שווה-שוקיים

25, 40

נושאים שונים

- הסבר משמעות הנדסית

5, 8



חכמת חיים של חז"ל

"אי אפשר לו לעולם בלא בַּשָּׂם ובלא בורסקאי. אלא מאי? אשריו מי שהוא בשם. אוי לו למי שהוא בורסקאי."

פירוש: כך היא דרכו של עולם:

העולם זקוק למי שמייצר בשמים (שעבודתו נעימה והוא אפוף ריחות טובים כל היום).

העולם זקוק גם למי שמעבד עורות (שעבודתו אפופה בריחות לא נעימים).

יופי לך אם אתה בַּשָּׂם. אוי לך אם אתה בורסקאי.

חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציה

פונקציה רציונאלית [131]

- עם פרמטר אחד: 21, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 46
- עם שני פרמטרים: 28, 31, 34, 38, 40, 45
- תחומי קעירות כלפי מטה/מעלה: 39, 42, 43, 45
- נקודות פיתול: 39

פונקציית שורש [145]

- עם פרמטר אחד: 9, 10, 11, 13
- עם שני פרמטרים: 7
- הישר y=k: 6, 8
- נקודות פיתול: 13

פונקציית טריגונומטרית [150]

- פונקציה זוגית/אי-זוגית: 8
- עם פרמטר אחד: 17
- עם שני פרמטרים: 6, 12
- נקודות קיצון מוחלט: 15
- נקודות פיתול: 13, 14, 15
- תחומי קעירות כלפי מטה/מעלה: 13, 14, 15, 16

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון

מיון לפי נושאים - כללי [159]

- תנועה
  - פונקציית שורש: 24
  - פונקציית שורש (עם משפט הקוסינוסים): 7, 27
- כלכלה עם תנועה
  - פונקציה רציונאלית: 25
- גאומטריה
  - פונקציה רציונאלית: 5, 6, 15, 16, 22
  - פונקציית שורש: 1, 2, 3, 4, 8, 15, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26
- גרפים [165]
  - פונקציה רציונאלית: 3, 6, 7, 10, 13
  - פונקציית שורש: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון

מיון לפי סוג הפונקציה

פונקציה רציונאלית

- כלכלה עם תנועה [159]: 25
- גאומטריה [159]: 5, 6, 15, 16, 22
- גרפים [165]: 3, 6, 7, 10, 13

פונקציית שורש

- תנועה [159]: 24
- תנועה, עם משפט הקוסינוסים [159]: 7, 27
- גאומטריה [159]: 1, 2, 3, 4, 9, 15, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26
- גרפים [165]: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16

Googol - ע נ ק ש ב ע נ ק י ם ! ! !

הגוגול מוכר בעולם כמנוע חיפוש באינטרנט, ואולם מושג זה מקורו מתמטי.

את גוגול הגדיר מתמטיקאי אמריקאי, Edward Kasner, בשנות הארבעים,

כדי לענין את אחיינו בן התשע במספרים גדולים.

הגוגול הוא המספר האסטרונומי 10^{100}.

מספר זה חסר משמעות מעשית כלשהי.

עד כמה אין למספר זה משמעות מעשית, נווכח מהדוגמאות הבאות:

שטח כדור הארץ בממ"ר הוא מחצית המספר 10^{21}.

מספר טיפות המים בים התיכון הוא 10^{24}.

מרחק כדור הארץ מהכוכב נוגה במיליונית המילימטר(!) הוא: 10^{27}.

מספר גרגרי החול שכדור הארץ יכול להכיל הוא 10^{31}.

היחס בין אורך קוטר כל היקום המוכר לנו היום לבין אורך הקוטר של גרעין האטום הוא 10^{42}.

משקל כדור הארץ בגרמים הוא 10^{27},

ומשקל כל היקום כולו בגרמים הוא 10^{56} ! ! !

מספר האטומים ביקום כולו מוערך ב־ 10^{80}

לעומת זאת: מספר המצבים בשחמט הוא: 10^{120} ! ! !

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון כללי [159]

מיון לפי צורה גאומטרית

- משולש
3, 6, 7, 8, 15, 19
- משולש שווה-שוקיים
1, 22
- משולש ישר-זווית
9, 12, 13, 14, 20, 24, 26
- מלבן
4, 6, 17, 19, 23, 26
- ריבוע
22
- טרפז שווה-שוקיים
11, 18
- מלבן חסום במשולש שווה-שוקיים
16
- מחומש
19
- מעגל
4
- גזרת עיגול/רבע עיגול/חצי עיגול/עיגול
3, 5, 23
- מלבן חסום במקטע מעגל
10
- טרפז שווה-שוקיים חסום במעגל
21

רק הוכחה היא הוכחה

עד כמה אין לסמוך על דוגמאות כדי להסיק מסקנות, ואפילו הן רבות מאוד, ניתן ללמוד מהתופעה שנתאר כעת. פרט ל־ 2, כל המספרים הראשוניים הינם פרדיים (לא־זוגיים, או 'פרטיים'). ואלה נחלקים לשתי קבוצות: המספרים שגדולים ב־1 מכפולה של 4: $4n+1$ והמספרים שקטנים ב־1 מכפולה של 4: $4n-1$.

בבדיקה של המספרים הראשוניים הראשונים, נראה שיש יותר מספרים ראשוניים בקבוצה של 'קטנים ב־1' מאשר בקבוצה של 'גדולים ב־1'. כך נמשכת התופעה עד מיליארד. ואולם - האבחנה הזאת אינה נכונה!

אנשי תורת המספרים הראו בשיטות עקיפות כי כאשר המספרים הראשוניים נעשים גדולים דיָם, הרי שיש יותר מספרים ראשוניים בקבוצה של 'גדולים ב־1' מאשר בקבוצה האחרת.

ההוכחה לעובדה זו פעלה רק כאשר המספרים היו גדולים מ־ $10^{10^{10^{10^{46}}}}$.

זהו מספר בלתי נתפס. לו כל החומר ביקום היה הופך לנייר והיינו רושמים על כל אלקטרון אפס אחד בלבד - לא היינו מכסים אפילו חלק קטן מהאפסים של מספר זה ! ! !

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון טריגונומטריה [169]

מיון לפי צורה גאומטרית

- משולש ישר-זווית
14
- משולש שווה-שוקיים
11, 20, 23
- מרובע
21
- דלתון, ריבוע
23
- טרפז
5
- מעגל
3, 8
- משולש חסום במעגל
2, 10, 18, 22
- משולש שווה-שוקיים חסום במעגל
17
- חצי מעגל חסום במשולש ישר-זווית
12, 19
- מעגל חסום במשולש ישר-זווית
4
- מרובע חסום במעגל
13
- מלבן/מלבנים חסום במעגל/גזרה
1, 9
- טרפז חסום בחצי מעגל
15
- טרפז שווה-שוקיים חוסם חצי מעגל
16
- רדיוס מעגל חוסם וחסום במשולש
6
- גופים במרחב: פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה ריבוע (משוכללת)
23

חשבון אינטגרלי - שטחים

פולינום [177]
- עם פרמטר אחד
5, 21, 31, 32, 33, 36
- עם שני פרמטרים
8, 11, 24, 25, 30, 34
- עם שלושה פרמטרים
10

פונקציה עם שורש ריבועי במכנה [185]
- עם שני פרמטרים
3

פונקציה רציונאליות [186]
- עם פרמטר
2, 3

פונקציה טריגונומטרית [187]
- עם פרמטר אחד
9, 10
- עם שלושה פרמטרים
4

שונות [190]
- מציאת פונקציה קדומה
1, 2, 4, 5
- בעיות קיצון עם אינטגרלים
3, 6, 7, 8

נפח גוף סיבוב [192]
- פונקציית שורש
2, 6, 10, 11, 12
- פונקציה טריגונומטרית
14
- בעיות ערך קיצון
7
- פרבולה
1, 5, 8, 9, 14
- עקומה
3
- מעגל
1, 4
- חרוט
2, 13
- כדור
4
- עם פרמטר
9, 10, 11, 13

הגדרות, תכונות ומשפטים גאומטריים לפתרון השאלות בגאומטריה אוקלידית [71]

נושא ראשי

ללא מעגל, ללא פרופורציה ודמיון (כיתה יו"ד)

36, 41, 51a, 53, 57a-b, 59a-b1, 61, 66, 67, 71, 76, 81, 83, 86, 91, 112, 113

פרופורציה ודמיון, ללא מעגל (כיתה יו"ד)

1, 3, 4, 8, 13, 15, 17, 22, 25, 26, 27, 28, 39, 43, 58, 62, 64, 65, 69, 73, 78, 80, 82, 90, 94, 96, 97, 98, 101, 110, 111, 115, 117, 119

מעגל ללא פרופורציה ודמיון

29, 34, 38, 40, 42, 45, 46, 55, 56, 57, 59, 63, 68, 70, 84, 87, 92, 95, 99, 104, 105, 106, 116, 118

פרופורציה ודמיון במעגל

2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 60, 72, 74, 75, 77, 79, 85, 88, 89, 93, 100, 102, 103, 107, 108, 109, 114

זוויות

- סכום זוויות צמודות הוא 180^0

19, 47, 49, 57, 63, 66, 78, 91, 93

- זוויות קדקודיות שוות זו לזו

14, 39, 41, 49, 51, 61, 64, 73, 89, 98, 99, 104, 105, 107

קווים מקבילים

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים

45, 86, 88, 91, 102, 112

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים

105

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0, אז שני הישרים מקבילים

9

- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל זוג זוויות מתאימות שוות זו לזו

13, 17, 20, 25, 27, 44, 58, 82, 99, 104, 115

  - כל זוג זוויות מתחלפות שוות זו לזו

11, 27, 32, 33, 37, 38, 43, 47, 54, 59, 60, 74, 82, 90, 91, 92, 95, 98, 101, 117

  - סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0

9

משולשים

- סכום הזוויות במשולש הוא 180^0

9, 12, 37, 46, 49, 50, 51, 57, 61, 62, 63, 66, 75, 76, 78, 84, 85, 86, 88, 99, 103, 105, 107, 108, 110

- זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה

10, 114

- במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

36, 42, 116

- במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות

107

משולש שווה-שוקיים

- במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו

10, 23, 46, 48, 49, 59, 63, 65, 70, 86, 92, 102, 103, 105, 108, 112, 119

- אם במשולש שתי זוויות שוות, אז המשולש הוא שווה-שוקיים

36, 53, 59, 60, 61, 63, 68, 74, 82, 86, 98, 99, 103, 115

- אם במשולש תיכון לצלע מתלכד עם חוצה הזווית שמול הצלע, אז המשולש הוא שווה שוקיים

91

- אם במשולש חוצה-זווית מתלכד עם הגובה לצלע שמול הזווית, אז המשולש הוא שווה שוקיים

104

- אם במשולש גובה מתלכד עם התיכון לאותה צלע, אז המשולש הוא שווה שוקיים

40, 83, 105

במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס - מתלכדים. לפיכך:

- חוצה-זווית הראש במשולש שווה שוקיים, הוא גובה לבסיס

68, 76, 84, 99, 100

- חוצה-זווית הראש במשולש שווה שוקיים, הוא תיכון לבסיס

99, 100

- תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם גובה לבסיס

53, 91

- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס

61, 74, 76, 83, 86, 99

- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם חוצה-זווית הראש

30, 105

משולש ישר-זווית

- במשולש ישר-זווית, היתר גדול מכל אחד מניצביו

36, 42, 81

- במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר

41, 56, 71, 83, 112, 119

- אם התיכון במשולש שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש הוא ישר-זווית

59, 91

- במשולש ישר-זווית, הזווית מול הניצב ששווה למחצית היתר היא 30^0

72, 85, 87

- במשולש ישר-זווית, הניצב מול זווית 30^0 שווה למחצית היתר

61, 63, 72, 91

משפט פיתגורס

- במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר

5, 44, 46, 50, 52, 55, 61, 62, 66, 72, 73, 75, 77, 79, 93, 98, 111, 118

משולש שווה-צלעות

- במשולש שווה-צלעות, כל הצלעות שוות זו לזו

57

- במשולש שווה-צלעות, כל הזוויות שוות בגודלן (60^0)

57, 59, 63, 65, 85, 95, 119

- משולש בו שתי זוויות שוות 60^0, הוא משולש שווה-צלעות

49, 59, 61, 95

- במשולש שווה-צלעות, חוצה הזווית, הגובה והתיכון לצלע מתלכדים

65, 119

משפטי חפיפה

- משפט חפיפה ראשון: צלע-זווית-צלע

29, 34, 51, 53, 57, 66, 73, 78, 98, 106, 115, 116

- משפט חפיפה שני: זווית-צלע-זווית

1, 41, 43, 47, 49, 71, 84, 102, 107, 113, 118

- משפט חפיפה שלישי: צלע-צלע-צלע

53

- משפט חפיפה רביעי: צלע-צלע-זווית

9, 36, 42, 45, 81, 86

- צמב"ח (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)

24, 36, 42, 43, 45, 53, 57, 81, 84, 98, 106, 115, 116, 118

- זמב"ח (זוויות מתאימות במשולשים חופפים)

9, 36, 42, 51, 53, 57, 66, 73, 78, 86, 115, 116

__בוריס ג'ונסון__, ראש ממשלת בריטניה ממפלגת השמרנים, הטיח ביריביו הפוליטים ממפלגת הלייבור (העבודה): "חצי מכם אנטישמים". יושב הראש כעס מאוד וקרא לו לחזור בו מהאשמתו זו.

בוריס ג'ונסון ענה לו: "בסדר. חצי מכם אינם אנטישמים . . ."

מרובעים

דלתון

- הדלתון מורכב משני משולשים שווי-שוקיים בעלי בסיס משותף
106, 116

- מרובע המורכב משני משולשים שווי-שוקיים בעלי בסיס משותף הוא דלתון
68, 85

- בדלתון, האלכסון הראשי חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני, ומאונך לו
85

- זוויות הדלתון שעל האלכסון המשני שוות זו לזו
106

מקבילית

- במקבילית, כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו
105

- במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו
41, 58, 61, 65, 90, 101

- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית
61

- מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות הוא מקבילית
45, 59, 86, 99, 104

- מרובע שבו שני הזוגות של צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית
1, 41, 58, 65, 112

- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית
87, 99

מלבן

- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו
4, 38, 43, 77, 80, 81

- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות מקבילות
80

- במלבן, כל הזוויות ישרות
43, 77, 81

- מרובע ששלוש מזוויותיו ישרות הוא מלבן
20, 44, 77, 92

מעוין

- במעוין, הצלעות שוות זו לזו
59, 87

- במעוין, האלכסונים חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה
46

- במעוין, האלכסונים חוצים את זוויותיו
46, 59

- מרובע שבו ארבע הצלעות שוות הוא מעוין
61

- מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין
87, 99

- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין
59, 99, 104

ריבוע

- בריבוע, כל הצלעות שוות זו לזו
51, 61, 73, 78

- בריבוע, כל שתי צלעות נגדיות מקבילות
44, 78

- בריבוע, כל הזוויות ישרות
51, 61, 62, 73, 78, 113

- בריבוע, האלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה
71, 113

- בריבוע, האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים את זוויותיו
71, 113

- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות הוא ריבוע
44, 92

טרפז

- בטרפז, הבסיסים מקבילים
64, 80

- בטרפז, סכום שתי הזוויות שליד כל שוק שווה 180^0
24, 65

טרפז שווה-שוקיים

- בטרפז שווה שוקיים, סכום כל זוג זוויות נגדיות הוא 180^0
47

- בטרפז שווה שוקיים, הזוויות שליד כל בסיס שוות זו לזו
53, 112, 115

- מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות, והצלעות בזוג השני (השוקיים) שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים
112

קטעים מיוחדים במשולש ובטרפז

נקודת מפגש התיכונים במשולש

- במשולש, נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 1:2, כך שהחלק הקרוב לקדקוד גדול פי 2 מהחלק האחר
65, 67

קטע אמצעים במשולש

- קטע במשולש המחבר אמצע צלע אחת לאמצע הצלע השנייה הוא קטע אמצעים
40, 76, 97

- קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השלישית, חוצה גם את הצלע השנייה (ולכן הוא קטע אמצעים במשולש)
53, 56, 105, 112

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית
83, 91, 97, 119

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה
40, 53, 69, 81

קטע אמצעים בטרפז

- קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השנייה (ולכן הוא קטע אמצעים בטרפז)
76

- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים
112

- קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסיו
76, 112

שטחים (ללא דמיון)

- תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי-שטח
69

- למשולשים חופפים שטחים שווים
1, 113

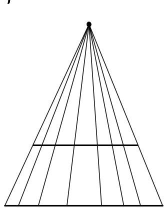
- שני משולשים בעלי בסיס שווה וגובה שווה - שווים בשטחם
67, 69, 110

פרדוקס אינסופי

האם בקטע קצר יש פחות נקודות מאשר קטע ארוך? מכיון שבין כל שתי נקודות יש נקודה שלישית, הרי בין כל שתי נקודות יש אינסוף נקודות, אז לכאורה בקטע קצר יש מספר נקודות כמו שיש בקטע הארוך!

ובכן, המונח 'מספר' לגבי כמות הנקודות אינו מדויק. בשני קטעים יש אותה 'עוצמה' של נקודות. עוצמה זו מסומנת במתמטיקה באות העברית 'אלף': א . זה מקביל לעוצמת המספרים הממשיים. להבדיל למשל מהמספרים השלמים, או הרציונאליים שהם בני מנָיָה, המסומנים: $\aleph_0$. הסימון באות העברית הוא לכבוד מייסד תורת הקבוצות, המתמטיקאי הרוסי־גרמני ממוצא יהודי (מצד האב) ***גאורג קנטור*** *(1845–1918). דרך יפה להמחיש את שוויון העוצמות הוא בתרשים להלן:*

לכל נקודה בקטע התחתון שתחובר לנקודה העליונה, תתאים נקודה ייחודית בקטע העליון, ולהיפך!



מאורעות נדירים שומרים לעצמם את הזכות להתרחש

(מרטין גרדנר)

פרופורציה

משפט תאלס (קו תחתי-עם מעגל)

- משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים

13, 58, 82

- משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים

3, 64, 106, 115, 117

- משפט תאלס - הרחבה ראשונה

26, 28, 69, 94, 96, 97, 117

- משפט תאלס - הרחבה שנייה

51, 64, 78, 80, 96, 97, 110, 119

משפט חוצה-זווית פנימית במשולש (קו תחתי-עם מעגל)

- חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה

3, 10, 22, 35, 52, 65, 74, 80, 82, 102, 108, 111

דמיון

משפטי דמיון

- משפט דמיון ראשון: צלע-זווית-צלע

39, 62, 64, 67, 98

- משפט דמיון שני: זווית-זווית

1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 33, 37, 39, 43, 44, 48, 50, 54, 58, 60, 72, 73, 75, 77, 85, 88, 89, 90, 93, 100, 101, 103, 108, 109, 110, 111, 114, 117

- יחס הדמיון

1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 37, 39, 43, 44, 48, 50, 54, 64, 73, 75, 77, 80, 88, 89, 90, 93, 98, 101, 108, 109, 110, 111, 114, 117

- זוויות מתאימות במשולשים דומים שוות זו לזו

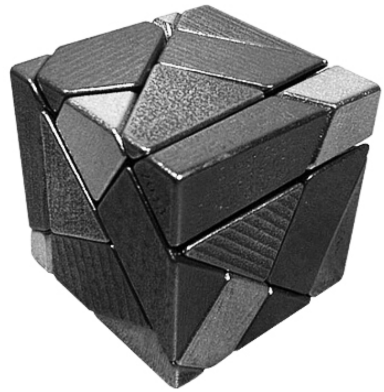
23, 98

- היחס בין גבהי משולשים דומים שווה ליחס הדמיון

17, 20, 39, 60, 67, 69, 80, 88

- היחס בין השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

1, 13, 15, 17, 25, 27, 28, 32



מעגל

זוויות, מיתרים וקשתות

- קטע ממרכז המעגל המאונך למיתר, חוצה את המיתר

29, 56, 84, 87

- קטע ממרכז המעגל החוצה מיתר, מאונך לו

56, 72, 118

- מיתרים שווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל

118

- מיתרים הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל, שווים זה לזה

84

- קשתות שוות נשענות על מיתרים שווים

99, 104, 116

- קשתות שוות נשענות על זוויות הקפיות שוות

2

- זווית הקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת

50, 63, 68, 93, 102, 116

- זוויות הקפיות הנשענות על אותו מיתר שוות זו לזו

38, 55, 57, 100

- מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות

116

- זוויות הקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו

6, 14, 16, 18, 23, 30, 34, 49, 50, 60, 85, 89, 95, 107, 108, 118

- זוויות הקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים

19, 34, 38, 70

- זוויות הקפיות הנשענות על מיתרים שווים, שוות זו לזו

38, 89, 99

- זוויות הקפיות הנשענות על קשתות שוות, שוות זו לזו

35, 52, 75, 103, 104

- זווית הקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90^0)

5, 7, 12, 40, 45, 72, 75, 77, 85, 87, 93, 99, 103, 104

- זווית הקפית בת 90^0 נשענת על קוטר

40, 42, 52, 55, 59, 77, 100

- זוויות מרכזיות הנשענות על מיתרים שווים, שוות זו לזו

68

- זוויות מרכזיות הנשענות על קשתות שוות, שוות זו לזו

102

משיק למעגל

- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה

24, 44, 55, 77, 79, 92

- זווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני

11, 19, 21, 32, 33, 37, 42, 47, 49, 54, 60, 70, 74, 77, 88, 103, 109, 114

- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה

70, 79, 106

מעגל חוסם משולש

- מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים של צלעותיו

46

מעגל חוסם מרובע

- ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה 180^0

10, 19, 51, 55, 57, 59, 63, 68, 85, 93, 95, 105

שלושת משפטי פרופורציה במעגל

- אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני

16, 18, 47, 52, 107

- אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק

16, 33, 54, 57

- אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני

6, 30

שאלות עם בניית-עזר

2, 5, 6, 10, 14, 16, 20, 24, 30, 31, 45, 46, 55, 58, 65, 70, 71, 79

ירושלים של זהב

את השיר המיתולוגי 'ירושלים של זהב' כתבה והלחינה נעמי שמר, שבועות ספורים לפני שחרור העיר.

הביצוע נמסר לזמרת אלמונית אז - שולי נתן.

שמה הפרטי של שולי 'שולי' ושם משפחתה של נעמי 'שמר' - נמצאות כולן בשם העיר 'ירושלים'.

גם כל שם העיר 'ירושלים' נמצא בשמן.

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
    ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
    ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

קל להיות קשה. קשה להיות קל.

37. *אלכסוני מלבן שווים זה לזה.*

38. *מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.*

39. *בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.*

40. *טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.*

41. *בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.*

42. *טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.*

43. *קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.*

44. *בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.*

45. *שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.*

46. *נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).*

47. *כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.*

48. *אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.*

49. *שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.*

50. *בכל משולש אפשר לחסום מעגל.*

51. *כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.*

52. *כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.*

53. *כל משולש ניתן לחסום במעגל.*

54. *במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.*

55. *שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.*

56. *ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.*

57. *מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.*

58. *כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.*

59. *בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.*

60. *דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.*

61. *במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.*

62. *במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.*

63. *במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.*

64. *מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.*

65. *מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.*

66. *במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.*

67. *האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.*

68. *קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.*

69. *במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.*

70. *במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.*

71. *במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.*

72. *במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.*

73. *זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).*

74. *זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.*

75. *במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.*

מי שהאמת עִמו - הוא הרבים, ואפילו הוא לבדו (שמואל יוסף עגנון)

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. (99–101 לחמש יחידות בלבד)

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)\,180^\circ$.

דרך כל שלוש נקודות ניתן להעביר ישר אחד - אם הוא מספיק עבה.

נוסחאון הבגרות לחמש יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \; ; \; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n})] \quad , \quad k = 0, 1, 2, \; . \; . \; . \; , n-1$$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0$, $\underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$ היא:

$$\left(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l} \, , \, \frac{ly_1 + ky_2}{k+l} \right)$$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

בנקודה (x_0, y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$

בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא:

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,
  כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- נוסחת בייס:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

מקור הביטוי 'עץ או פלי' הוא בתקופת השלטון הבריטי בארץ.
על צד אחד של מטבע בערך מיל היה מצויר עץ ובצידו
האחר היה רשום 'פלשתינא (א"י)'.

טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל־b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל־c)
- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

  $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

  נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

  נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

  נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו־$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי)

  אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

  $\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$