בגרויות מתמטיקה 581 פתרונות מלאים - חלק שני

מספר מילים לפנֵי

ספר זה הוא השני משני ספרים המכילים שאלות ממבחני הבגרות במתמטיקה לשאלון 581 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. חלק זה מכיל את כל 52 המבחנים שנערכו לשאלון זה בין השנים 2022–2009, במתכונת המבחן הנוכחי. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא צמוד למבחן. בספר הראשון שאלות מהשנים 2013–2004, מחולקות לפי נושאים.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת ל**שריף אמארה** מכפר זָלָפָּה ול**שרון חיים** מפתח תקוה.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלְחֵתִי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקודות **לאומית או יהודיות**.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

אלי מיטב

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 382-481-482-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 481-482-581-582

מבחן 1 - קיץ תשס"ט - 2009 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שתי שאלות מהשאלות 4-6 , שתי שאלות מהשאלות 7-9

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. רוכב אופניים יצא בשעה $8:00$ מעיר A לעיר B .

רוכב אופניים שני יצא בשעה $9:00$ מעיר A לעיר B . המרחק בין A ל־ B הוא 45_{km} .

כאשר הרוכב הראשון הגיע לעיר B

הרוכב השני עדיין לא הגיע לעיר B והיה במרחק של 25_{km} ממנה.

מהירות הרוכב הראשון גדולה ב־ m קמ"ש ממהירות הרוכב השני, וידוע כי $0 < m < 5$.

א. הבע באמצעות m את שני הפתרונות האפשריים למהירות הרוכב השני.

ב. נסמן את שני הפתרונות שהבעת בסעיף א' ב־ x_1 וב־ x_2 .

מצא עבור אילו ערכי m מתקיים $|x_1 - x_2| < 11$.

3. ידוע כי בכפר מסוים 20% מהתושבים חולים במחלת מעיים.

רופא הכפר בדק את כל התושבים.

90% מהחולים בכפר אובחנו על ידו כחולים, ו־ 10% מהבריאים בכפר אובחנו על ידו כחולים.

א. מהו אחוז התושבים בכפר שלגביהם הרופא ביצע אבחנה שגויה?

הרופא נתן תרופה לכל מי שאובחן על ידו כחולה.

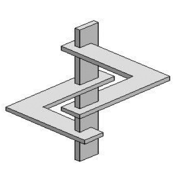
התרופה גרמה לפריחה אצל 60% מהחולים שאובחנו כחולים,

ואצל 25% מהבריאים שאובחנו כחולים.

ב. מהי ההסתברות שתושב בכפר חולה, אם ידוע שיש לו פריחה?

שבעת המספרים הבאים הם מספרים ראשוניים עוקבים: $53\ ,\ 47\ ,\ 43\ ,\ 41\ ,\ 37\ ,\ 31\ ,\ 29$.
המספר המורכב מסדרת הספרות של מספרי סדרה זו: $29,313,741,434,753$ **גם הוא ראשוני!**
זהו המספר הראשוני הקטן ביותר עם תכונה זו. (Prime curios)

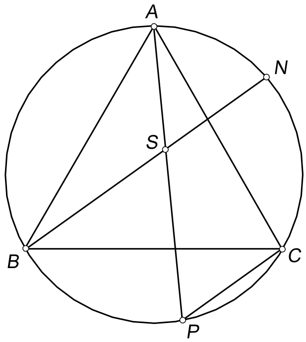
תשובות



1. א. $\dfrac{25-m\pm\sqrt{625-130m+m^2}}{2}$ km/h **ב.** $4 < m < 5$

3. א. 10% **ב.** $\dfrac{27}{32}$

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. ABC הוא משולש שווה־צלעות החסום במעגל.

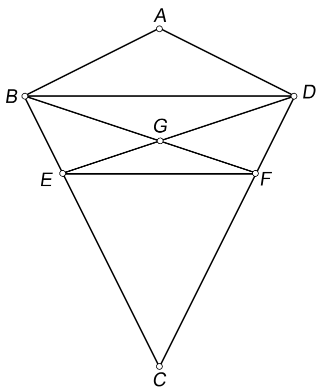
N ו־ P הן נקודות על המעגל.

BN ו־ AP נפגשים בנקודה S. נתון: $PC \parallel BN$.

הוכח כי: **א.** המשולש BSP הוא שווה־צלעות

ב. המרובע $SPCN$ הוא מקבילית

ג. $AN = PC$



5. $ABCD$ הוא דלתון שבו $AB = AD$ ו־ $BC = DC$.

E נקודה על הצלע BC, ו־ F נקודה על הצלע DC

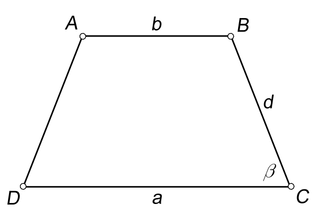
כך ש־ DE חוצה את הזווית ADC,

ו־ BF חוצה את הזווית ABC.

BF ו־ DE נפגשים בנקודה G.

א. הוכח: **(1)** $GB = GD$ **(2)** $\triangle BGE \cong \triangle DGF$

ב. הוכח כי המרובע $DBEF$ הוא טרפז שווה־שוקיים.



6. בטרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$

אורך הבסיס הגדול CD הוא a

אורך הבסיס הקטן AB הוא b, ואורך השוק הוא d.

הזווית ליד הבסיס הגדול DC היא β.

א. הוכח כי אורך אלכסון הטרפז הוא $\sqrt{ab + d^2}$.

ב. הזווית בין אלכסון הטרפז ובין הבסיס הגדול של הטרפז היא α.

הוכח כי אם $\alpha + \beta = 90^\circ$ אז $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}$

קרול לואיס

Lewis Carroll היה שמו הספרותי של **צ'רלס לוטווידג' דודג'סון**, 1898–1832.

קרול לואיס היה סופר, מתמטיקאי, לוגיקן, צלם, ממציא ופילוסוף בריטי.

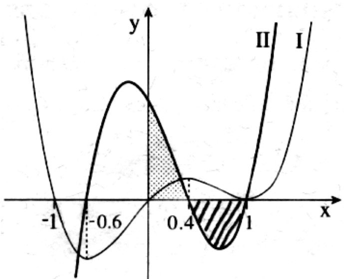
הוא התפרסם בעיקר בזכות ספרו **עליסה בארץ הפלאות** שכתב עבור ילדה של אחד המרצים באוניברסיטה בה הוא לימד.

קרול לואיס חיבר גם מספר ספרי מתמטיקה וחידות מתמטיות ולוגיות.

אגדה אורבנית מספרת שהמלכה **ויקטוריה** כתבה לו שהיא נהנתה לקרוא את הספר, וביקשה שישלח לה את חיבורו הבא. קרול שלח לה את ספרו **חיבור בסיסי על דטרמיננטים** שעוסק במתמטיקה . . .

פרק שלישי

חדו"א של פולינומים , של פונקציות שורש , של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות



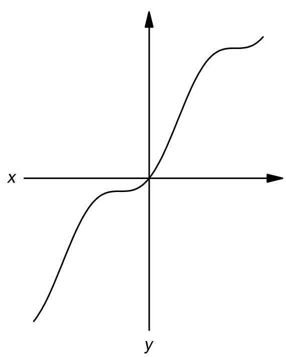
7. בציור שלפניך מוצגות סקיצות של שני גרפים: גרף I וגרף II .
אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת השניה $f''(x)$.

א. איזה גרף הוא של $f'(x)$,
ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.

ב. מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. מצא את שיעורי x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הוכח שהשטח המוגבל על־ידי גרף II וציר x (המקווקוו בציור)
שווה לשטח המוגבל על־ידי גרף II והצירים (המנוקד בציור).



8. נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin 2x}{2}$.

א. הראה כי $f'(x) = 2\sin^2 x$.

ב. **(1)** האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $g(x) = x + \sin^2 x$
בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
בתחום הנתון מצא את כל השטח המוגבל על־ידי הגרף של $g(x)$ ועל־ידי הישר $y = x$.

9. נתון משולש שאחת מצלעותיו היא 10_{cm} , וגובה המשולש לצלע זו הוא 5_{cm} .
(המשולש אינו קהה־זווית.)

א. מבין כל המשולשים שהם כאלה, מצא את צלעות המשולש שהיקפו מינימלי.

ב. מה הן תכונות המשולש שאת צלעותיו מצאת בסעיף א'?

בהצלחה

תשובות

7. **א.** $f'(x) \longleftrightarrow I$, $f''(x) \longleftrightarrow II$ **ב.** $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$ **ג.** $x_1 = -0.6$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 1$

8. **ב.** **(1)** לא **(2)** כן **ג.** $S = \pi$ (יחידות ריבועיות)

9. **א.** 10_{cm} , $5\sqrt{2}_{cm}$, $5\sqrt{2}_{cm}$ **ב.** משולש ישר־זווית ושווה־שוקיים

פתרון מבחן 1

1. א.

	דרך	מהירות	זמן
רוכב ב׳	20	x	$\frac{45}{x+m}-1$
רוכב א׳	45	$x+m$	$\frac{45}{x+m}$

$\Leftarrow \quad \underline{x(\frac{45}{x+m}-1)=20}$

$$\frac{45x}{x+m}-x=20 \quad /\cdot(x+m) \quad \Rightarrow \quad 45x-x^2-mx=20x+20m$$

$$-x^2+(25-m)x-20m=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{m-25\pm\sqrt{625-50m+m^2-80m}}{-2}$$

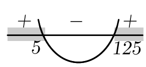
$$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{1,2}=\frac{25-m\pm\sqrt{625-130m+m^2}}{2}} \ \mathbf{km/h}$$

ב.

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{25-m+\sqrt{625-130m+m^2}}{2}-\frac{25-m-\sqrt{625-130m+m^2}}{2}\right|=|\sqrt{m^2-130m+625}|<11$$

(1) תחום ההגדרה:

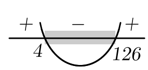
$$625-130m+m^2\ge 0 \quad , \quad m_{1,2}=\frac{130\pm120}{2}=65\pm60 \quad \Rightarrow \quad m_1=5 \ , \ m_2=125$$

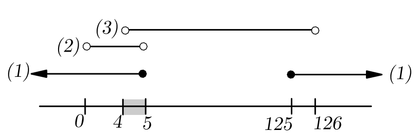
$a_m=1>0 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \underline{(m\le5)\cup(m\ge125)}$

(2) נתון: $\underline{0<m<5}$

(3)

$$m^2-130m+625<11^2 \quad \Rightarrow \quad m^2-130m+504<0 \quad , \quad m_{1,2}=\frac{130\pm122}{2}=65\pm61$$

$m_1=4 \ , \ m_2=126 \ ; \ a_m=1>0 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \underline{4<m<126}$

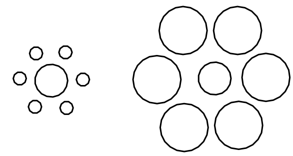
$(1)\cap(2)\cap(3):$  $\Rightarrow \quad \mathbf{4<m<5}$

תעתועי ראיה

בציור נראה כאילו העיגול המרכזי בקבוצה השמאלית גדול יותר מהעיגול המרכזי בקבוצה הימנית, נכון?

אז זהו, שלא:

שני הכדורים המרכזיים בשתי הקבוצות שווים זה לזה!



3. א. הגדרת מאורעות: A - חולה , B - מאובחן כחולה

$P(A)=0.2 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A})=0.8$

$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B\cap A)}{0.2}=0.9 \quad \Rightarrow \quad P(B\cap A)=0.18$

$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B\cap\overline{A})}{0.8}=0.1 \quad \Rightarrow \quad P(B\cap\overline{A})=0.08$

	A	$\overline{A}$	Σ
B	0.18	0.08	$0.18+0.08=0.26$
$\overline{B}$	$0.2-0.18=0.02$	$0.8-0.08=0.72$	$0.02+0.72=0.74$
Σ	0.2	0.8	1

$P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=0.02+0.08 = \mathbf{0.1=10\%}$

ב.

בשאלה לא נתון שאין פריחה לאנשים שלא קיבלו את התרופה מהרופא.

אין נתון גם אם יש מי מהמאובחנים כחולים שיש לו פריחה שלא כתוצאה מהשימוש בתרופה.

נתונים אלו אינם מצוינים בשאלה וזה חסר.

אנו מניחים שהנחת העבודה של השאלה היא כזאת:

כל פריחה שיש למי מתושבי הכפר נגרמה עקב נטילת התרופה מהרופא.

זה גם אומר שכל מי שלא אובחן כחולה - אין לו פריחה.

נבנה טבלה עבור האוכלוסיה שאובחנה כחולה.

נסמן: C - שיעור החולים (שאובחנו כחולים) , $\overline{C}$ - שיעור הבריאים (שאובחנו כחולים)

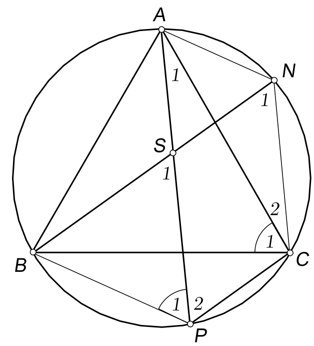
D - שיעור בעלי הפריחה

	C	$\overline{C}$	Σ
D	$60\%\cdot\frac{9}{13}=\frac{27}{65}$	$25\%\cdot\frac{4}{13}=\frac{1}{13}$	$\frac{27}{65}+\frac{1}{13}=\frac{32}{65}$
$\overline{D}$	$\frac{9}{13}-\frac{27}{65}=\frac{18}{65}$	$\frac{4}{13}-\frac{1}{13}=\frac{3}{13}$	$\frac{18}{65}+\frac{3}{13}=\frac{33}{65}$
Σ	$\frac{0.18}{0.26}=\frac{9}{13}$	$\frac{0.08}{0.26}=\frac{4}{13}$	1

$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{27}{65}}{\frac{32}{65}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(C/D)=\frac{27}{32}}$

המספר הראשוני $5,780,507$ **ניתן להצגה הבאה:** $5,780,507=3^4+5^6+7^8$

4. בנית עזר: BP , NC , AN



א.

$(1)\ \angle P_1 = \angle C_1 \overset{(2)}{=} 60^\circ$, $(1)\ \angle P_2 = \angle ABC = 60^\circ$

$(3)\ \angle S_1 = \angle P_2 = 60^\circ$

<u>$\triangle SBP$:</u> $(4)\ \angle B = 180^\circ - 2\cdot 60^\circ = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle S = \angle B = \angle P$

(5) $\mathbf{BS = SP = PB}$ $(\checkmark)$

ב.

$(1)\ \angle N_1 = \angle BAC = 60^\circ$

$(6)\ \angle S_1 = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle N_1 = \angle S_1 \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} NC \parallel SP$, $(8)\ PC \parallel SN$

$\overset{(9)}{\Rightarrow}$ **SPCN מקבילית** $(\checkmark)$

ג.

$(6)\ AP \parallel NC \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \angle C_2 = \angle A_1 \quad \overset{(10)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{AN = PC}$ $(\checkmark)$

---

(1) זווית היקפיות הנשענות על מיתרים שווים - שוות זו לזו

(2) זווית במשולש שווה־צלעות היא בת 60°

(3) זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(4) השלמה ל־ 180° במשולש

(5) משולש שכל זוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה־צלעות

(6) סעיף קודם

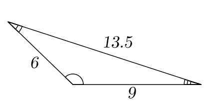
(7) אם זוויות מתאימות שוות זו לזו בישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי - הישרים מקבילים זה לזה

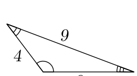
(8) נתון

(9) הגדרת מקבילית: מרובע שכל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו

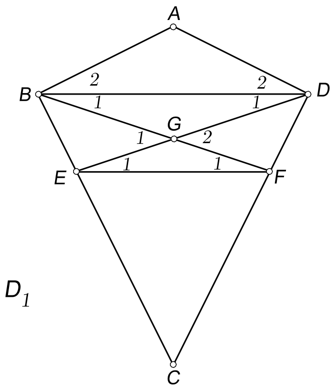
(10) זוויות היקפיות שוות - נשענות על מיתרים שווים

ישנם אינסוף זוגות משולשים השווים ב־5 גדלים מתוך 6 (3 צלעות ו־3 זוויות),
ובכל זאת הם אינם חופפים!
למשל:
אורכי צלעותיו של אחד המשולשים הם: 9 ,4 ,6 יחידות אורך,
ואורכי צלעותיו של המשולש השני הם: 13.5 ,6 ,9 יחידות אורך.
שני המשולשים האלה דומים אך אינם חופפים!





5. א. (1)



$(1)\ \angle ABC = \angle ADC \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ADC$

$\Rightarrow \quad \angle ABF = \angle ADE$

$(2)\ AB = AD \quad \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \ \angle B_2 = \angle D_2$

$\Rightarrow \quad \angle ABF - \angle B_2 = \angle ADE - \angle D_2$

$\angle ABF - \angle B_2 = \angle B_1 \ , \quad \angle ADE - \angle D_2 = \angle D_1 \quad \Rightarrow \quad \angle B_1 = \angle D_1$

$(4)\ \mathbf{GB = GD}\ (\checkmark)$

(2)

$(1)\ \angle ABC = \angle ADC \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ADC \quad \Rightarrow \quad \angle CBF = \angle CDE$

$(5)\ GB = GD \ , \ (6)\ \angle G_1 = \angle G_2 \quad \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{\triangle BGE \cong \triangle DGF}$

ב.

$(5)\ \triangle BGE \cong \triangle DGF \quad \stackrel{(8)}{\Rightarrow} \ \underline{BE = DF} \ , \ (2)\ BC = DC$

$\Rightarrow \quad BC - BE = DC - DF \quad \Rightarrow \quad \underline{EC = FC}$

$\Rightarrow \quad \frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FC} \quad \stackrel{(9)}{\Rightarrow} \ BD \parallel EF$

$BE = DF \ , \ BD \parallel EF \ , \ (10)\ BE \nparallel DF \quad \Rightarrow$ **טרפז שווה־שוקיים DBEF** $(\checkmark)$

---

(1) זוויות הדלתון שעל האלכסון המשני שוות זו לזו (2) נתון

(3) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו

(4) משולש שזוויות הבסיס שלו שוות זו לזו הוא משולש שווה־שוקיים

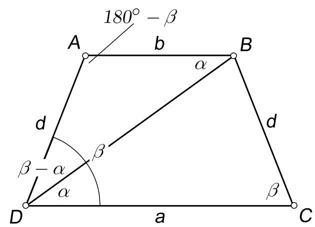
(5) מסעיף קודם (6) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(7) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית (8) צמב״ח

(9) משפט תאלס הפוך (10) במשולש אין צלעות מקבילות

ר' אברהם הַבֶּדֶרְשִׁי *היה פיטן שחי בצרפת במאה ה־ 13. הוא חיבר תפילה ארוכה שנקראת 'בַּקָּשַׁת אֶלֶף אַלְפִין'.*
תפילה זו מכילה אלף מילים שכולן מתחילות באות 'א' !
יצירה אחרת שלו, 'בַּקָּשַׁת ה־לָמֶדִין' או 'בֵּית אֵל', הינה שיר, עם חרוז ועם משקל. בכל מילה שלו מופיעה האות 'ל'
וכל השיר בנוי רק על מחצית אותיות הא"ב: מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד !
לכן הוא גם נקרא 'בית אל': 'בית' = 412 מילים , 'אל' - האותיות מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד.
בנו, הפיטן ***ר' יְדַעְיָה הַפְּנִינִי*** *חיבר את 'בַּקָּשַׁת הַמֵּמִין'. בתפילה זו למעלה מאלף מילים, שכולן מתחילות באות 'מ' !*

6. א.



$\underline{\triangle BDC:}\ \ BD^2 \overset{*}{=} a^2+d^2-2\,ad\cos\beta$ משפט הקוסינוסים

$\underline{\triangle BDA:}\ \ BD^2 = b^2+d^2-2\,bd\cos(180^\circ-\beta)$ משפט הקוסינוסים

$a^2+d^2-2\,ad\cos\beta = b^2+d^2-2\,bd\,\underline{\cos(180^\circ-\beta)}$

$a^2-2\,ad\cos\beta = b^2-2\,bd\,(\underline{-\cos\beta})$

$2\,bd\cos\beta+2\,ad\cos\beta = a^2-b^2 \quad\Rightarrow\quad \cos\beta=\frac{a^2-b^2}{2d(b+a)}$

$(*)\ \ BD^2 = a^2+d^2-2\,ad\,\frac{a^2-b^2}{2d(b+a)} = a^2+d^2-\frac{a(a^2-b^2)}{a+b} = a^2+d^2-\frac{a(a+b)(a-b)}{a+b}$

$= a^2+d^2-a^2+ab = d^2+ab \quad\Rightarrow\quad \mathbf{BD=\sqrt{ab+d^2}}\ \ (\checkmark)$

ב.

$\underline{\triangle DBC:}\ \ \alpha+\beta=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \angle B=90^\circ \quad\Rightarrow\quad BD^2+d^2=a^2$ פיתגורס

$\Rightarrow\quad ab+d^2+d^2=a^2 \quad\Rightarrow\quad 2d^2=a^2-ab \quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{\frac{a^2-ab}{2}}$

מספיק להוכיח: $\Rightarrow\ \sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}=\frac{d}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{b}$

$\underline{\triangle ABD:}\ \ \angle ADB=\beta-\alpha \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{b}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{\sin\alpha}}_{\text{משפט הסינוסים}} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{b}}\ \ (\checkmark)$

אפשר גם:

מספיק להוכיח: $\Rightarrow\ \sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}=\frac{d}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{b}$

$\Longleftrightarrow\quad b\sin\alpha = d\sin(\beta-\alpha)$

$d\sin(\beta-\alpha)=d\sin((90^\circ-\alpha)-\alpha)=d\sin(90^\circ-2\alpha)=d\cos2\alpha$

$\Longleftrightarrow\quad b\sin\alpha=d\cos2\alpha$

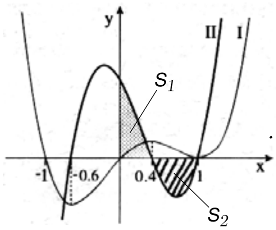
$\Longleftrightarrow\quad b\cdot\frac{\cancel{d}}{a}=\cancel{d}\,(1-2\sin^2\alpha)$

$1-2\sin^2\alpha = 1-2\left(\frac{d}{a}\right)^2 = 1-\frac{2d^2}{a^2} = 1-\frac{\cancel{2}\cdot\frac{a^2-ab}{\cancel{2}}}{a^2} = \frac{a^2-a^2+ab}{a^2}=\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}$

$\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{\frac{b}{a}=\frac{b}{a}}\quad(\checkmark)$

מספרי יחידה ראשוניים

המספר המורכב מפעמיים הספרה '1' או מ־19 או מ־317 או מ־1031 פעמים '1' - הוא מספר ראשוני



7. א. בנקודות שבהן $x=-0.6\ ,\ 0.4\ ,\ 1$ לגרף I יש נקודות קיצון

וגרף II מתאפס. מתאים לכך ש־ II הוא נגזרת של I

בנקודות שבהן ל־גרף II יש נקודות קיצון - גרף I <u>אינו</u> מתאפס.

לכן גרף I אינו מתאים להיות הנגזרת של גרף II.

מסקנה: $\boldsymbol{f'(x) \longleftrightarrow I\ ,\ f''(x) \longleftrightarrow II}$

ב.-ג. ממצאי הגרפים והמסקנות נתונים בטבלה שלהלן (infl. קיצור של inflection - פיתול):

x		-1		-0.6		0		0.4		1	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	max	↘	infl.	↘	min	↗	infl.	↗	infl.	↗
f	⌒	⌒	⌒	infl.	⌣	⌣	⌣	infl.	⌒	infl.	⌣

$\Rightarrow$ **max:** $x=-1$, **min:** $x=0$; **infl.:** $x=-0.6$, $x=0.4$, $x=1$

ד.

$$S_1=\int_0^{0.4} f''(x)\,dx = f'(x)\Big|_0^{0.4} = f'(0.4)-f'(0)=f'(0.4)-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{לפי הציור}}}{0}=\underline{f'(0.4)}$$

$$S_2=-\int_{0.4}^{1} f''(x)\,dx=-f'(x)\Big|_{0.4}^{1}=-(\underset{\substack{\uparrow\\ =0}}{f'(1)}-f'(0.4))=\underline{f'(0.4)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_1=S_2}\ (\checkmark)$$

כנ״ל

---

8. א.

$$f(x)=x-\frac{\sin 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=1-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cos 2x\cdot \cancel{2}=1-\cos 2x=1-(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$(1-\cos^2 x)+\sin^2 x=\sin^2 x+\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f'(x)=2\sin^2 x}\ (\checkmark)$$

ב. 1-2.

$$f'(x)=2\sin^2 x \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=\pi k$$

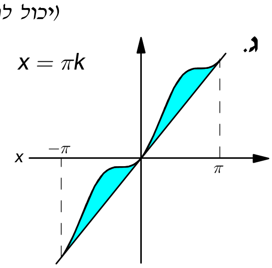
$f'(x)=2\sin^2 x \ge 0$ לכל x . לכן הפונקציה עצמה הינה <u>מונוטונית עולה</u>.

ולכן: **(1)** **<u>אין</u> לפונקציה נקודות קיצון**

(2) **<u>יש</u> לפונקציה** (אינסוף) **נקודות פיתול** (באותן נקודות שבהן $x=\pi k$)

(יכול להיות שיש עוד. לא נדרש.)

ג.



$$y=x\ ,\ g(x)=x+\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad x+\sin^2 x=x \quad \Rightarrow \quad \sin x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pi k$$

$$\Rightarrow \quad x_1=-\pi\ ,\ x_2=0\ ,\ x_3=\pi$$

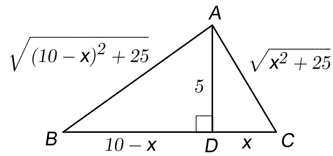
$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(\cancel{x}+\sin^2 x-\cancel{x})\,dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

ע״פ סעיף א׳

$$S=\frac{1}{2}(\pi-\frac{1}{2}\cdot 0)-\frac{1}{2}\cdot(-\pi-\frac{1}{2}\cdot 0)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S=\pi}$$ **(יחידות ריבועיות)**

9. א.

$DC = x \quad \Rightarrow \quad BD = 10 - x \;, \quad AC = \sqrt{25 + x^2} \;, \quad AB = \sqrt{25 + (10 - x)^2}$



$f(x) = AB + BC + AC = \sqrt{(10 - x)^2 + 25} + 10 + \sqrt{25 + x^2}$

$f'(x) = \frac{\cancel{2}(10-x)\cdot(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(10-x)^2+25}} + 0 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25+x^2}}$

$= \boxed{\frac{-(10-x)\sqrt{25+x^2} + x\sqrt{(10-x)^2+25}}{\sqrt{(10-x)^2+25}\cdot\sqrt{25+x^2}}} \overset{?}{=} 0$

$(*) \quad x\sqrt{(10 - x)^2 + 25} = (10 - x)\sqrt{25 + x^2} \quad /(\;)^2$

$x^2(10 - x)^2 + 25x^2 = 25(10 - x)^2 + x^2(10 - x)^2$

$25x^2 = 25(10 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm(10 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 10 - x \quad \Rightarrow \quad 2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

$x = -10 + x \quad \Rightarrow \quad 0 = -10 \quad \Rightarrow \quad \emptyset$

בדיקת הפתרון $(x = 5)$:

$(*) \quad 5\cdot\sqrt{(10 - 5)^2 + 25} \overset{?}{=} (10 - 5)\cdot\sqrt{25 + 5^2} \quad \rightarrow \quad 5\cdot\sqrt{25 + 25} \overset{\checkmark}{=} 5\cdot\sqrt{25 + 25}$

בדיקה שזה אכן מינימום:

הפונקציה מוגדרת עבור $0 < x < 10$ (אורך צלע המשולש 10_{cm}):

x	0		5		10
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min $(\checkmark)$	$\nearrow$	

$x = 5 \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \;, \quad AB = \sqrt{(10 - 5)^2 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

אורכי צלעות המשולש המבוקש 10_{cm} , $5\sqrt{2}_{cm}$, $5\sqrt{2}_{cm}$

ב.

(1) שווה־שוקיים: $AB = AC = 5\sqrt{2}_{cm}$

(2) ישר־זווית: $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{50})^2 = 100 = 10^2 = BC^2$

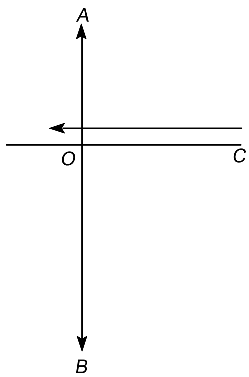
$\Leftarrow$ **המשולש ישר־זווית ושווה־שוקיים**

עשיר : עיניים, שיניים, ידיים, רגליים

מבחן 52 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: חמש שאלות מהשאלות 1-8.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות



1. הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O

והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O.

הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O, במרחק של 12_{km} ממנה.

ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A.

באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O.

מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי.

ברגע שהגיע אורי לנקודה A, היה המרחק בינו לבין סמדר $\sqrt{424}_{km}$.

המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.

א. מצא את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון,
אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O.

באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B.

בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה.

מהירות ההליכה של בועז היתה קבועה וגדולה ב־ 50% ממהירות ההליכה של אורי.

כאשר הגיע אורי לנקודה A, היה המרחק בינו לבין בועז 23_{km}, ובאותו רגע שניהם עצרו.

ב. מצא את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז.

ביום שני יצאו אורי ובועז להליכה באותו הזמן.

כל אחד יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון,

והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון.

בועז הקטין את מהירות הליכתו ב־ v קמ"ש ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב־ v קמ"ש.

שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 27_{km}.

ג. מצא כמה דקות הלך אורי ביום שני.

365 הוא המספר הקטן ביותר הניתן להצגה כסכום של שלושה מספרים ריבועיים עוקבים,   **וגם כסכום של שני מספרים ריבועיים עוקבים אחריהם:** $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

תשובות

1. א. Uri : 10_{km} , Smadar : 30_{km} **ב.** Uri : $4_{km/h}$, Boaz : $6_{km/h}$ **ג.** $t = 24_{minutes}$

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, והפרשה הוא d.

נסמן ב־ S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכח כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל־ 0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמק.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצא את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים איברים בסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$.

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצא את ערכו של d.

3. עיתון מופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל־אביב בלבד, אמור להִשלח אל ביתם בכל יום עד $6:00$.

מערכת העיתון ערכה סקר בין המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא. מהסקר עלה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{2}{3}$.

ההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב־ q את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הבע באמצעות q את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל־אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל־אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל־אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל־אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

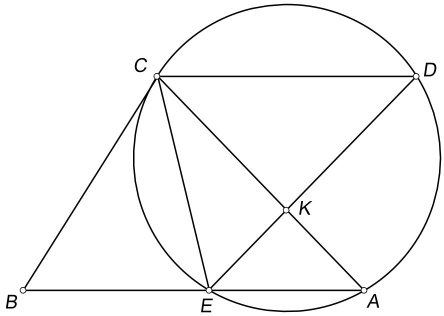
ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

תשובות

2. **ב.** $d < 0$ **ג.** $3n = 39$ **ד.** $d = -3$

3. **א.** $P = \frac{4}{15}q$ **ב.** $P = 56\%$ **ג.** $P = \frac{30}{121}$ **ד.** $P = 0.9277$

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



.4 מנקודה B, שמחוץ למעגל,

העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C,

וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו־ A.

הנקודה D נמצאת על המעגל,

כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA.

המיתרים ED ו־ AC נחתכים בנקודה K.

א. הוכח: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.

נתון: $AK = 3$, $ED = 7$. נסמן את שטח המשולש CEK ב־ T.

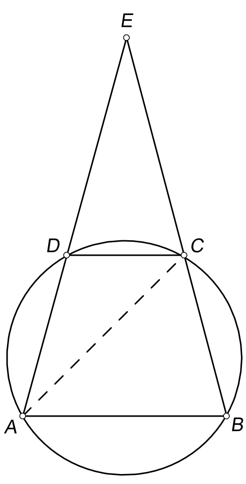
ב. הבע באמצעות T את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$. **ג.** הבע באמצעות T את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל. **ד.** הוכח: $\angle COE = \angle CKE$.

נתון: $\angle CAE = 45^\circ$.

ה. הסבר מדוע הנקודות O , C , E ו־ K נמצאות על מעגל אחד.



.5 נתון טרפז ABCD (AB||DC), החסום במעגל.

המשכי הצלעות AD ו־ BC נפגשים בנקודה E.

נתון: $\angle ACB = 60^\circ$. נסמן: $AC = k$, $\angle CDE = \alpha$.

א. (1) מצא את זוויות המשולש ACE

(הבע באמצעות α, אם יש צורך).

(2) הבע באמצעות α ו־ k את אורכי הצלעות AB ו־ DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצא את גודל הזווית α.

ג. מצא את הערך של k שעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{63}$.

תשובות

.4 ב. $S_{\triangle DKC} = \frac{4}{3}T$ **ג.** $S_{\triangle CEB} = \frac{175}{96}T$

.5 א. (1) $\angle E = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle C = 120^\circ$, $\angle A = 2\alpha - 120^\circ$

(2) $DC = \frac{k \sin(2\alpha - 120^\circ)}{\sin \alpha}$, $AB = \frac{\sqrt{3}\,k}{2 \sin \alpha}$ **ב.** $\alpha = 75^\circ$ **ג.** $k = 6$

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{(x-3)^2}$, $0<a<3$ הוא פרמטר.

א. הבע תשובותיך בסעיף זה באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצא את את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{x^2}{(x-3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הוכח כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) הבע באמצעות a את השטח המוגבל על־ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$,
על־ידי הישר $x=1$ ועל־ידי ציר y.

מגן דוד ראשוני

המספר הבא מורכב מ־ 121 ספרות 5 , 3 , 2 ו־ 7 בלבד הוא מספר ראשוני פלינדרומי !

2, 352, 772, 532, 555, 723, 327, 533, 333, 772, 222, 332, 222, 772, 777, 327, 772, 777, 227, 277, 777, 7
532, 772, 355, 553, 277, 233, 353, 332, 772, 222, 332, 222, 777, 777, 232, 777, 777, 227, 727, 777

את המספר ניתן לסדר באופן סימטרי בצורת מגן־דוד:

7
7 7
7 2 7
7 2 2 7
7 7 7 7 7 2 3 2 7 7 7 7 7
7 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 7
7 2 3 3 3 5 3 3 3 2 7
7 2 3 5 5 5 5 3 2 7
7 2 3 5 2 5 3 2 7
7 2 3 5 5 5 5 3 2 7
7 2 3 3 3 5 3 3 3 2 7
7 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 7
7 7 7 7 7 2 3 2 7 7 7 7 7
7 2 2 7
7 2 7
7 7
7

המבנה המתואר התגלה על־ידי

[illegible] (Dr. Michael Hartley) 2003 .

תשובות

.6 א. (1) $x\neq 3$ **(2)** $x=3$, $y=1$ **(3)** $(\pm a,0)$, $(0,-\frac{a^2}{9})$ **(4)** $x_{min}=\frac{a^2}{3}$

ב. (2) $S=\frac{a^2}{6}$ (יחידות ריבועיות)

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האם גרף הפונקציה חותך את הצירים? נמק.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

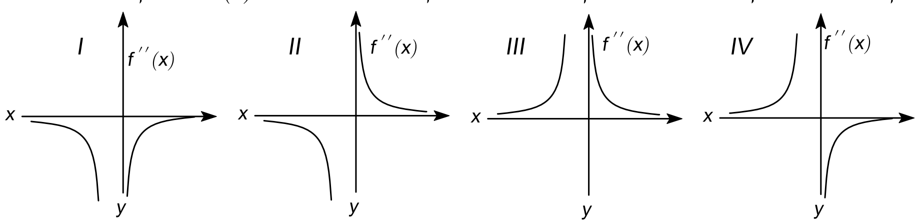
(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

נתון כי לפונקציה אין נקודות פיתול.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. היעזר בגרף הפונקציה $f(x)$,

וקבע איזה מבין הגרפים שלפניך מתאר את גרף הנגזרת השניה $f''(x)$. נמק.



ד. חשב את השטח המוגבל על־ידי הגרף של פונקצית הנגזרת השניה $f''(x)$,

על־ידי ציר x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו־ $x = 2$.

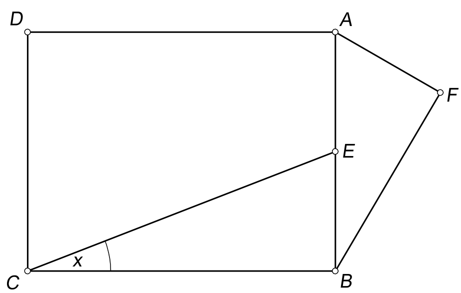
8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB.

על הקטע AB בונים מלבן ABCD

ומשולש ישר־זווית AFB, $\angle AFB = 90^\circ$.

נתון: $\angle FAB = 2x$, $\angle ECB = x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב־ h.



א. מהו תחום הערכים האפשריים עבור x? הסבר.

ב. הבע באמצעות x ו־ h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.

ג. מצא את הערך של x שעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF מינימלי.

ד. עבור הערך של x שמצאת בסעיף ג, מצא את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

בהצלחה –

תשובות

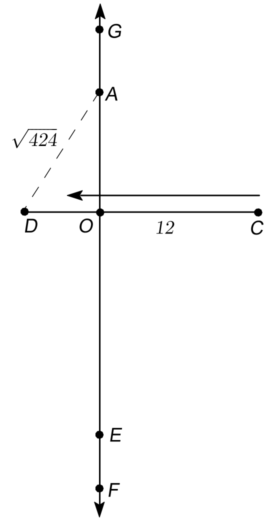
7. א. **(1)** $(x < -1) \cup (x > 0)$ **(2)** לא **(3)** $x_{\rightarrow} = -1$, $y_{\rightarrow} = 4$, $y_{\leftarrow} = -4$

(4) $\nearrow: x > 0$, $\searrow: x < -1$ **ג.** I **ד.** $S = 0.4349$ (יחידה ריבועית)

8. א. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ **ב.** $CE - AF = \frac{h}{2 \sin x} - h \cos 2x$ **ג.** $x_{min} = \frac{\pi}{6}$ **ד.** $\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AFB}} = 4$

פתרון מבחן 52

1. א.



		V	T	S
Uri :	$A \uparrow O$	x	y	xy
Smadar :	$D \leftarrow O \leftarrow C$	$3x$	y	$3xy$

$DO = 3xy - 12$

$\underline{\triangle AOD:}$ $AO^2 + OD^2 = AD^2$ פיתגורס

$$(xy)^2 + (3xy - 12)^2 = 424 \quad / - 424$$

$$(xy)^2 + 9(xy)^2 - 72xy - 280 = 0 \quad / : 2$$

$$5(xy)^2 - 36xy - 140 = 0$$

$$(xy)_{1,2} = \frac{36 \pm 64}{10}$$

$$xy > 0 \quad \Rightarrow \quad xy = 10 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Uri}: 10_{km} \ , \ \textbf{Smadar}: 30_{km}$$

ב.

		V	T	S
Uri :	$A \uparrow O$	x	y	10
Boaz :	$O \downarrow E$	$\frac{3}{2}x$	$y - \frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}x(y - \frac{1}{3})$

$$\Rightarrow \quad AE = 10 + \frac{3}{2}x(y - \frac{1}{3}) = 23$$

$$10 + \frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}x = 23 \quad \Rightarrow \quad 10 + \frac{3}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2}x = 23 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$\Rightarrow \quad \textbf{Uri}: 4_{km/h} \ , \ \textbf{Boaz}: 6_{km/h}$$

ג.

		V	T	S
Uri :	$G \uparrow A$	$4 + v$	t	$t(4 + v)$
Boaz :	$E \downarrow F$	$6 - v$	t	$t(6 - v)$

$$\Rightarrow \quad t(6 - v) + t(4 + v) = 27 - 23 = 4$$

$$6t - tv + 4t + tv = 4 \quad \Rightarrow \quad 10t = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{6} = \frac{24}{60} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 24_{minutes}}$$

המכפלות להלן מכילות, כל אחת, את כל הספרות מ־ 1 עד 9 פעם אחת בדיוק:

$4 \times 1738 = 6952$, $4 \times 1963 = 7852$, $12 \times 483 = 5796$, $18 \times 297 = 5346$

$27 \times 198 = 5346$, $39 \times 186 = 7254$, $42 \times 138 = 5796$, $48 \times 159 = 7632$

2. א. $S_n^* = \frac{1}{3}\cdot S_{3n} \iff \frac{n}{2}\cdot(2a_{n+1}+d(n-1)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{2}(2a_1+d(3n-1)) \quad /\cdot\frac{2}{n}$

$\iff 2a_{n+1}+d(n-1) = 2a_1+d(3n-1) \iff 2a_{n+1}+dn-d = 2a_1+3dn-d$

$\iff 2a_{n+1} = 2a_1+2dn \iff \mathbf{a_{n+1} = a_1+dn}\ (\checkmark)$

ב. האיבר הראשון חיובי. אם הפרש הסדרה הוא חיובי - לא ניתן לסכום תת־סדרה שסכומה הוא 0.

לכן: הפרש הסדרה הוא שלילי: $\mathbf{d < 0}$.

ג.

$a_1 = 19\cdot|d|\ ,\ d<0 \Rightarrow a_1 = 19\cdot(-d) \Rightarrow a_1 = -19d$

$S_n^* = \frac{n}{2}(2a_{n+1}+d(n-1)) = 0 \quad /\cdot\frac{2}{n} \Rightarrow 2(a_1+dn)+dn-d=0 \Rightarrow 2a_1+3dn-d=0$

$\Rightarrow 2\cdot(-19d)+3dn-d=0 \quad /:d \Rightarrow -39+3n=0 \Rightarrow n=13 \Rightarrow \mathbf{3n=39}$

ד. m - מספר האיברים בסדרה החדשה:

$2,\ 5,\ 8,\ ...,35 \Rightarrow 2+3(m-1)=35 \Rightarrow m=12$

$S_{new} = \frac{12}{2}(2a_2+3d\cdot 11) = 6(2(a_1+d)+33d) = 12(a_1+d)+198d$

$= 12(-19d+d)+198d = -18d = \underset{\text{נתון}}{54} \Rightarrow \mathbf{d=-3}$

---

3. A - גר בחיפה , B - קיבל את העיתון בזמן

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$(1)\ \frac{2}{3}q=\frac{2}{5}$	$\frac{14}{15}q-\frac{2}{3}q=\frac{4}{15}q=\frac{4}{25}$	$(2)\ \frac{14}{15}q=\frac{14}{25}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$	$1-q-\frac{4}{15}q=1-\frac{19}{15}q=\frac{6}{25}$	$1-\frac{14}{25}=\frac{11}{25}$
$\sum$	$(3)\ q=\frac{3}{5}$	$1-q=\frac{2}{5}$	1

$P(A)=q\ ,\ (1)\ P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B\cap A)}{q}=\frac{2}{3} \Rightarrow P(B\cap A)=\frac{2}{3}q$

$(2)\ P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}q}{P(B)}=\frac{5}{7} \Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}q:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}q\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}q$

א.

$P=P(\overline{A}\cap B) \Rightarrow \mathbf{P=\frac{4}{15}q}$

ב.

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1.5\cdot P(\overline{A}\cap B) \Rightarrow 1-\frac{19}{15}q=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{15}q \Rightarrow \frac{5}{3}q=1 \Rightarrow (3)\ q=\frac{3}{5}$

$P(B)=\frac{14}{15}q=\frac{14}{15}\cdot\frac{3}{5}=\frac{42}{75}\ \times 100 \Rightarrow \mathbf{P=56\%}$

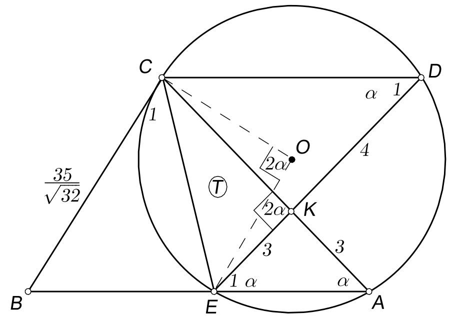
ג.

$P=P(\overline{A}/\overline{B})\cdot P(A/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}\cdot\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{11}{25}}\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{25}} \Rightarrow \mathbf{P=\frac{30}{121}}$

ד.

$P(A/\overline{B})=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{25}}=\frac{5}{11} \Rightarrow P=1-P_6(6)+P_6(5)=1-(\frac{5}{11})^6-(\frac{6}{5})\cdot(\frac{5}{11})^5\cdot(\frac{6}{11}) \Rightarrow \mathbf{P=0.9277}$

.4



א.

$\angle C_1 \overset{(1)}{=} \angle D_1\ ,\ \angle CEB \overset{(2)}{=} \angle DCE$

$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ **$\triangle CEB \sim \triangle DCE$** $(\checkmark)$

ב.

$\angle E_1 \overset{(2)}{=} \angle D_1 \overset{(4)}{=} \angle A \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad EK = AK = 3$

$\Rightarrow \quad KD = 7 - 3 = 4$

$\frac{S_{\triangle DKC}}{S_{\triangle EKC}} \overset{(6)}{=} \frac{KD}{KE} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\triangle DKC}}{T} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{\triangle DKC} = \frac{4}{3}T}$

ג.

$\frac{CB}{DE} = \frac{\frac{35}{\sqrt{32}}}{7} = \frac{5}{\sqrt{32}}$

$S_{\triangle DCE} = S_{\triangle CEK} + S_{\triangle CDK} = T + \frac{4}{3}T = \frac{7}{3}T$

$\frac{S_{\triangle CEB}}{S_{\triangle DCE}} \overset{(7)}{=} \left(\frac{5}{\sqrt{32}}\right)^2 = \frac{25}{32} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\triangle CEB}}{\frac{7}{3}T} = \frac{25}{32} \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle CEB} = \frac{25}{32}\cdot\frac{7}{3}T \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{\triangle CEB} = \frac{175}{96}T}$

ד.

$\angle E_1 = \angle A = \angle D \overset{(8)}{=} \alpha \quad \overset{(9)}{\Rightarrow} \quad \angle COE = 2\alpha$

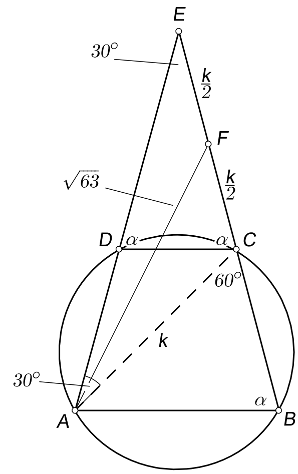
$\angle CKE \overset{(10)}{=} 2\alpha \quad \overset{(11)}{\Rightarrow}$ **$\angle COE = \angle CKE$** $(\checkmark)$

ה. ניתן לוותר על גודל הזווית. זווית הראיה של הקטע CE מ־ O ו־ K שווה: 2α.
במקרה זה - ארבע הנקודות: קדקודי זוויות הראיה וקצות הקטע, נמצאים על מעגל אחד.
אפשר גם לחשב ששתי הזוויות הן בנות 90°, כך ש־ $CE = 2R$,
מה שאומר שכל הנקודות על מעגל אחד.

---

(1) זווית בין משיק למעגל לבין מיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על אותו מיתר מצידו האחר
(2) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי
(3) משפט דמיון זווית־זווית (4) זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר
(5) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות (6) לשני בסיסי המשולשים גובה משותף
(7) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון (8) סימון
(9) זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותו מיתר
(10) זווית חיצונית במשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה
(11) כלל המעבר

.5 **א.** **(1)**



$\angle ACE \overset{(1)}{=} 120^\circ$, $\angle B + \angle ADC \overset{(2)}{=} 180^\circ$

$\angle BAD + \angle ADC \overset{(3)}{=} 180^\circ \overset{(4)}{\Rightarrow} \angle B = \angle BAD$

$\angle ECD \overset{(5)}{=} \angle CBA = \angle BAD \overset{(5)}{=} \angle EDC \overset{(6)}{=} \alpha$

$\triangle EDC:\ \angle E \overset{(7)}{=} 180^\circ - 2\alpha$

$\triangle ACE:\ \angle EAC \overset{(7)}{=} 180^\circ - 120^\circ - (180^\circ - 2\alpha)$

$\Rightarrow \angle EAC = 2\alpha - 120^\circ$

$\Rightarrow$ **$\triangle ACE$: $\angle A = 2\alpha - 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, $\angle E = 180^\circ - 2\alpha$**

(2)

$\triangle ABC:\ \frac{AB}{\sin 60^\circ} \overset{(8)}{=} \frac{k}{\sin\alpha} \Rightarrow \mathbf{AB = \frac{\sqrt{3}\,k}{2\sin\alpha}}$

$\triangle ADC:\ \frac{k}{\sin(180^\circ-\alpha)} \overset{(8)}{=} \frac{DC}{\sin(2\alpha-120^\circ)}$

$\overset{(9)}{\Rightarrow} \mathbf{DC = \frac{k\sin(2\alpha-120^\circ)}{\sin\alpha}}$

ב.

$(10)\ \triangle ABE \sim \triangle DCE$, $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DCE}} \overset{(6)}{=} 3 \overset{(11)}{=} \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}\,DC$

$\frac{\sqrt{3}k}{2\sin\alpha} = \sqrt{3}\cdot\frac{k\sin(2\alpha-120^\circ)}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin(2\alpha-120^\circ) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$(1)\ 2\alpha - 120^\circ = 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ\ (\surd) \Rightarrow \mathbf{\alpha = 75^\circ}$

$(2)\ 2\alpha - 120^\circ = 150^\circ \Rightarrow 2\alpha = 270^\circ \Rightarrow \alpha = 135^\circ\ (\times)$

ג.

$\alpha = 75^\circ \Rightarrow \angle EAC = \angle E = 30^\circ \Rightarrow EC \overset{(12)}{=} AC \overset{(6)}{=} k \Rightarrow EF = FC = \frac{k}{2}$

$\triangle AFC:\ AF^2 = (\sqrt{63})^2 \overset{(13)}{=} k^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 2\cdot k\cdot\frac{k}{2}\cdot\cos 120^\circ = \frac{5}{4}k^2 - k^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{7}{4}k^2 = 63 \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow \mathbf{k = 6}$

---

(1) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה (2) זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל־ 180°

(3) סכום זוויות חד־צדדיות במקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי (4) כלל המעבר

(5) זוויות מתאימות בישרים מקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי (6) נתון

(7) השלמה ל־ 180° במשולש (8) משפט הסינוסים (9) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

(10) משפט דמיון זווית־זווית (11) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

(12) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות (13) משפט הקוסינוסים

6. א. (1)

$(x) = \frac{x^2-a^2}{(x-3)^2} \quad , \quad 0 < a < 3 \quad ; \quad (x-3)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x \neq 3}$

(2)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\to 9-a^2}{\to 0} = \frac{\to \neq 0}{\to 0} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-\frac{a^2}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})} = \frac{1-0}{1-0+0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 1}$$

(3)

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-a^2}{9} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0, -\frac{a^2}{9})}$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\pm a, 0)}$

(4)

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2-(x^2-a^2)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3)-2(x^2-a^2)}{(x-3)^3} = \boxed{\frac{-6x+2a^2}{(x-3)^3}} \overset{?}{=} 0$$

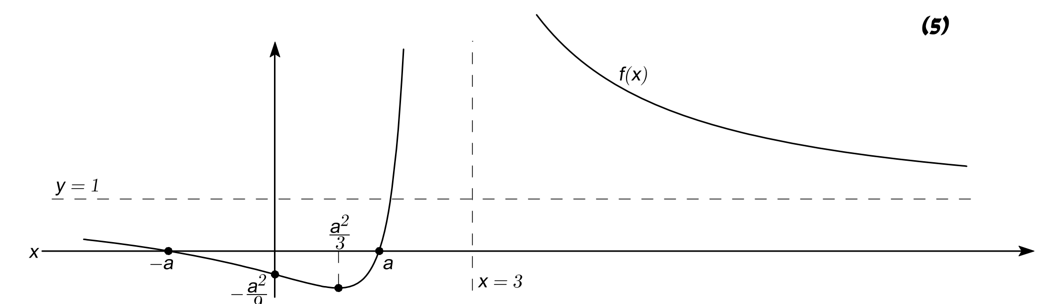
$$\Rightarrow \quad 6x = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a^2}{3}$$

$0 < a < 3 \quad \Rightarrow \quad 0 < a^2 < 9 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{a^2}{3} < 3$

x		$\frac{a^2}{3}$		3	
f'	$\frac{+}{-} = -$	0	$\frac{-}{-} = +$	$\emptyset$	$\frac{-}{+} = -$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	asym.	$\searrow$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{min} = \frac{a^2}{3}}$

(5)



ב. (1)

$g(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2} > f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{(x-3)^2} > \frac{x^2-a^2}{(x-3)^2}$

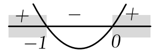
$\Longleftrightarrow \quad x^2 > x^2 - a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{0 > -a^2} \quad (\checkmark)$

(2)

$$S = \int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{x^2-a^2}{(x-3)^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{a^2}{(x-3)^2}\,dx = -\frac{a^2}{x-3}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{a^2}{2} - \left(-\frac{a^2}{-3}\right) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = \frac{a^2}{6}} \quad \text{(יחידות ריבועיות)}$$

7. א. (1)

$f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+x}}\quad,\quad x^2+x=x(x+1)>0 \quad\Rightarrow$  $\quad\Rightarrow\quad \mathbf{(x<-1)\cup(x>0)}$

(2)

$y=0 \quad\Rightarrow\quad 4x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\not\in\{(x<-1)\cup(x>0)\}\quad\Rightarrow$ **<u>לא</u>**

(3)

$$\lim_{x\to-1-} f(x)=\frac{\to -4}{\to 0}=\infty \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x_{\to}=-1}$$

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{4}{\to\sqrt{1+\infty}}=\frac{4}{\infty}=0 \quad\Rightarrow\quad (0,0) \quad\Rightarrow$$ אי־רציפות סליקה ("חור")

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{4}{\sqrt{1+0}}=4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y_{\to}=4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cancel{x}}{-1\,|\cancel{x}|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{4}{-\sqrt{1+0}}=-4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y_{\leftarrow}=-4}$$

(4)

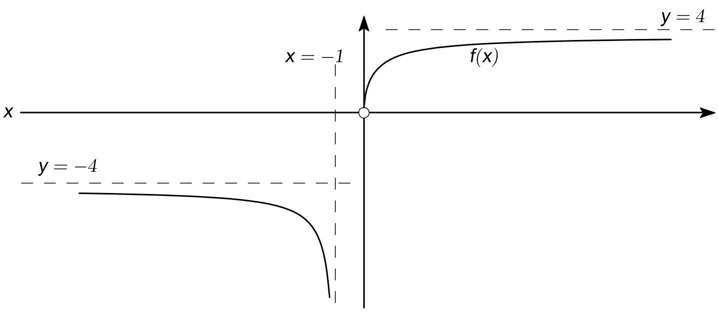
$$f'(x)=\frac{4\cdot\sqrt{x^2+x}-{}^{2}\cancel{4}x\cdot\frac{2x+1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x}=\frac{4(x^2+x)-2x(2x+1)}{(x^2+x)^{1.5}}$$

$$=\boxed{\frac{2x}{(x^2+x)^{1.5}}}\neq 0\quad\forall\, x\in\{(x<-1)\cup(x>0)\}$$

x		-1		0	
f'	$\frac{-}{+}=-$	$\emptyset$			$\frac{+}{+}=+$
f	↘	asym.	$\emptyset$	$0\ \leftarrow$	↗

$\Rightarrow\quad$ <u>↘</u>: $\mathbf{x<-1}\quad,\quad$ <u>↗</u>: $\mathbf{x>0}$

ב.



ג. הגרף מתאר קעירות כלפי מטה ($\frown$) בכל תחום ההגדרה.

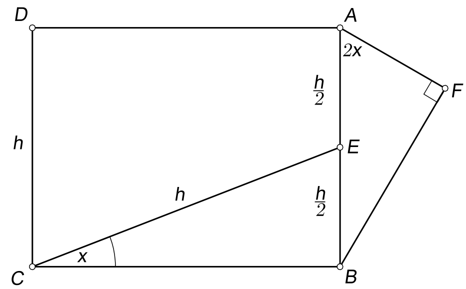
לכן הנגזרת השניה שלילית בכל תחום ההגדרה. מתאים רק ל**גרף I**.

ד.

$$S=-\int_1^2 f''(x)\,dx=-f'(x)\Big|_1^2=-(f'(2)-f'(1))=f'(1)-f'(2)$$

$$=\frac{2}{2^{1.5}}-\frac{4}{6^{1.5}}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=0.4349}$$ **(יחידה ריבועית)**

8. א.



$\angle F = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < 2x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{0 < x < \frac{\pi}{4}}$

ב.

$\underline{\triangle AFB:}\ \frac{AF}{AB} = \frac{AF}{h} = \cos 2x$

$\Rightarrow \quad AF = h \cos 2x$

$\underline{\triangle EBC:}\ \frac{EB}{CE} = \frac{\frac{h}{2}}{CE} = \sin x \quad \Rightarrow \quad CE = \frac{h}{2 \sin x}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{CE - AF = \frac{h}{2 \sin x} - h \cos 2x}$

ג.

$f(x) = \frac{h}{2 \sin x} - h \cos 2x$

$f'(x) = \frac{h}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot \cos x - h \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -\frac{h \cos x}{2 \sin^2 x} + 2h \sin 2x \overset{?}{=} 0 \quad / \cdot \frac{2}{h}$

$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} + 4 \sin 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \sin 2x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 2 \sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \quad / \cdot \sin^2 x$

$8 \sin^3 x \cos x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos x\,(8 \sin^3 x - 1)} = 0$

$(1)\quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \notin \{0 < x < \frac{\pi}{4}\} \quad \Rightarrow \quad \times$

$(2)\quad 8 \sin^3 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^3 x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$(2_a)\quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \in \{0 < x < \frac{\pi}{4}\} \quad \Rightarrow \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$

$(2_b)\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5\pi}{6} \notin \{0 < x < \frac{\pi}{4}\} \quad \Rightarrow \quad \times$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f'		$+ - = -$	0	$+ + = +$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{min} = \frac{\pi}{6}}$

ד.

$\angle BCE = \frac{\pi}{6} \ , \ BE = \frac{h}{2} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad CE = h \quad \Rightarrow \quad BC \overset{(2)}{=} \sqrt{h^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} h^2} = \frac{h\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = CD \cdot BC = h \cdot \frac{h\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$

$S_{\triangle AFB} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AB \cdot \sin 2x = \frac{1}{2} \cdot h \cos \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} h^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\, h^2}{8}$

$S_{ABCD} : S_{\triangle AFB} = \frac{\sqrt{3}\, h^2}{2} : \frac{\sqrt{3}\, h^2}{8} = \frac{\sqrt{3}\, h^2}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}\, h^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{ABCD} : S_{\triangle AFB} = 4}$

---

(1) ניצב מול זווית בת 30° שווה למחצית היתר, ולהיפך (2) פיתגורס

סימנים מתמטיים המופיעים בספר

$\cup$ - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x < 2$ או $x > 9$ ייכתב כך: $(x < 2) \cup (x > 9)$

$\cap$ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x < 8$ וגם $x > 1$ הוא התחום: $1 < x < 8$.
נרשום זאת כך: $\underline{1 < x < 8} \quad \Rightarrow \quad (x > 1) \cap (x < 8)$.

$(\surd)$ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

$\in$ - שייכות. דוגמה: $x \in [1,9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1,9]$ או: $1 \le x \le 9$
דוגמה: $(1,2) \notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1,2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו־ D .

$\forall$ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$. כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

דוגמה: $\frac{(x-1)^2}{x^6} > 0 \ \forall \{x \ne 0 \ , \ x \ne 1\}$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ־ 0 לכל x השונה מ־ 0 ושונה מ־ 1 .

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $6x^2 - x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 19}{12} = \ldots$
זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\triangle}$ ובבדיקת החישוב.

'ללא הגבלת הכלליות' - קביעת ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור להצטמצם בהמשך). למשל, אם יש למצוא גודל זווית לפי יחסי צלעות, ניתן לקבוע אורך אחת מהן כ־ 1 (יחידת אורך אחת, או כל ערך אחר).

$\emptyset$ - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-5}}{3} = \emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון

ep. - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד־צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד־צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5,6)\ :\ min_{ep}$.

ab. - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7,11)\ :\ max_{ab}$.

cm^2 - סמ"ר , **cm^3** - סמ"ק , **asym.** - אסימפטוטה , **infl.** - פיתול (inflection)

$\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , למשל: $f \nearrow \forall x > 6$ - המשמעות: הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 6$

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x \to a+$ - שאיפה ל־ a מימין , למשל: '$x \to 0+$' הכוונה היא לשאיפה $0.1, 0.01, 0.001 \ldots$
$x \to a-$ - שאיפה ל־ a משמאל , למשל: '$x \to 0-$' הכוונה היא לשאיפה $0.9, 0.99, 0.999 \ldots$

lim - קיצור של limit, גבול.
למשל: $\lim\limits_{x \to \infty}(x) = 5$: הגבול של $f(x)$ כאשר x 'שואף' ל־ ∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y = 5$).

$y_{\rightarrow} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד.

$y_{\leftarrow} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד.

<u>ללא הגבלת הכלליות</u> - הסבר

כשצריך למצא יחסים בין חלקים שונים ללא נתוני גודלם, מסמנים בדרך כלל, את גודל אחד החלקים בפרמטר, נניח a, ואת החלקים האחרים בהתאם ליחס שלהם לפרמטר שקבענו.

במקרים כאלה ניתן לקבוע מספר (במקום פרמטר) שנח לנו לעבוד איתו ולציין: ׳ללא הגבלת הכלליות׳, שזה אומר שאותו גודל שקבענו הוא מקרה פרטי המתאים גם לכל גודל אחר.

<u>דוגמה:</u> אורך אחד הניצבים במשולש ישר־זווית גדול פי שלושה מאורך הניצב האחר.

פי כמה גדול אורך היתר מאורך הניצב הקטן?

<u>פתרון:</u> ברור מנוסח השאלה שלא משנה מהם אורכי צלעות המשולש אלא רק היחס ביניהם.

נסמן את אורך הניצב הקטן ב־a . מכאן שאורך הניצב הגדול הוא $3a$.

נפעיל את משפט פיתגורס ואז אורך היתר הוא:

$$\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2}=a\sqrt{10}$$

ולכן היתר גדול מהניצב הקטן פי $\sqrt{10}=\frac{\cancel{a}\sqrt{10}}{\cancel{a}}$.

בפתרון זה היינו רשאים לקבוע את אורך הניצב הקטן כ־1 (ולציין: ׳ללא הגבלת הכלליות׳).

לכן אורך הניצב הגדול היה 3 ואורך היתר היה $\sqrt{10}$. היחס שהיה מתקבל הוא בדיוק אותו יחס.

אם היינו קובעים את אורך הניצב הקטן כ־ 8. אורך הניצב הגדול היה 24. אורך היתר היה $24\sqrt{10}$,

והיחס המבוקש היה בדיוק אותו יחס - $\sqrt{10}=\frac{24\sqrt{10}}{24}$.

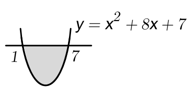
מכאן שניתן לבחור במקרים כאלה את אורך אחד הגדלים לנוחותנו ומשם להמשיך בפתרון.

׳פטנט׳ זה מאושר לשימוש בפתרון מבחני הבגרות על־ידי משרד החינוך.

<u>שינוי גבולות אינטגרציה בחישוב שטח</u> - הסבר

חישוב שטח בין גרף פונקציה לבין ציר x הנמצא מתחת לציר x נותן ערך שלילי.

השטח הינו הערך המוחלט של אותו ערך שקיבלנו.



ישנן מספר אפשרויות כדי לקבל את הערך הנכון.

1. סימון כל הביטוי בערך מוחלט:

$$S=\left|\int_1^7 (x^2+8x+7)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+4x^2+7x\right)\Big|_7^1\right|=$$

$$\left|\left(\frac{1}{3}+4+7\right)-\left(\frac{343}{3}+98+49\right)\right|=\left|11\frac{1}{3}-261\frac{1}{3}\right|=|-250|=250$$

2. הצמדת מינוס לביטוי:

$$S=-\int_1^7 (x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =-(-250)=250$$

3. הפיכת גבולות האינטגרציה (לשם כך התכנסנו . . .):

$$S=\int_7^1 (x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =261\frac{1}{3}-11\frac{1}{3}=250$$

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.

38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.

41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.

45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).

47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.

48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.

49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.

52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.

53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.

54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.

57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.

64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.

66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.

67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.

71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.

73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).

74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.

75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. **(99–101 לחמש יחידות בלבד)**

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)\,180^\circ$.

נוסחאון הבגרות לחמש יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \;,\; a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \;,\; a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \;,\; a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a \;,\; a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a \;,\; a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \;;\; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b \;,\; a^{\log_a b} = b \;,\; \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \;,\; \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \;,\; \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})] \;,\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0 \;,\; \underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$ היא: $\left(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l} \; , \; \frac{ly_1 + ky_2}{k+l} \right)$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

בנקודה (x_0, y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$

בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,

כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

המספר: $1,799,999,999,999,999,999$ הוא מספר ראשוני.

קל לזכור אותו: רושמים 17 ואחריו 17 פעמים את הספרה 9.

טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל־b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל־c)
- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו־$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי)

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

$\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$