

בגרויות מתמטיקה - 482 - פתרונות מלאים - אלי מיטב

- גידול ודעיכה 1 _____
- סדרות
- 16 _____ - סדרה חשבונית
- 30 _____ - סדרה הנדסית
- 37 _____ - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
- 42 _____ - סדרות מעורבות (חשבונית והנדסית)
- 45 _____ - סדרות כלליות וסדרות נסיגה
- טריגונומטריה במרחב
- 53 _____ - מנסרה
- 58 _____ - פירמידה
- חשבון דיפרנציאלי
- 65 _____ - פונקציות מעריכיות
- 78 _____ - פונקציות לוגריתמיות
- 95 _____ - פונקציות טריגונומטריות
- חשבון אינטגרלי
- 122 _____ - פונקציות מעריכיות
- 146 _____ - שפתרון לוגריתמי
- 163 _____ - טריגונומטריות
- מבחני בגרות
- 192 _____ מבנה מבחן הבגרות
- 193 _____ 1 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א
- 196 _____ 2 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד ב
- 200 _____ 3 - קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנוז
- 204 _____ 4 - חורף תשע"א - 2011
- 209 _____ 5 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א
- 213 _____ 6 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד ב
- 217 _____ 7 - חורף תשע"ב - 2012
- 221 _____ 8 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד א
- 225 _____ 9 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד ב
- 229 _____ 10 - חורף תשע"ג - 2013
- 234 _____ 11 - חורף תשע"ג - 2013 - לוחמים
- 239 _____ 12 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד א
- 246 _____ 13 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד ב
- 252 _____ 14 - קיץ תשע"ג - 2013 - לוחמים
- 259 _____ 15 - חורף תשע"ד - 2014
- 265 _____ 16 - חורף תשע"ד - 2014 - לוחמים
- 270 _____ 17 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א
- 18 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ב _____ 275
- 19 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ג _____ 281
- 20 - סתו תשע"ה - 2014 - מועד ד _____ 286
- 21 - חורף תשע"ה - 2015 _____ 291
- 22 - חורף תשע"ה - 2015 - לוחמים _____ 297
- 23 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א _____ 302
- 24 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב _____ 308
- 25 - חורף תשע"ו - 2016 _____ 315
- 26 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד א _____ 322
- 27 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב _____ 327
- 28 - חורף תשע"ז - 2017 _____ 333
- 29 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א _____ 339
- 30 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד ב _____ 346
- 31 - חורף תשע"ח - 2018 _____ 353
- 32 - קיץ תשע"ח - 2018 - מועד א _____ 359
- 33 - קיץ תשע"ח - 2018 - מועד ב _____ 366
- 34 - חורף תשע"ט - 2019 _____ 372
- 35 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד א _____ 377
- 36 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב _____ 384
- דוגמאות - משרד החינוך _____ 391
- 37 - חורף תש"פ - 2020 _____ 399
- 38 - קיץ תש"פ - 2020 - מועד א _____ 406
- 39 - קיץ תש"פ - 2020 - מועד ב _____ 413
- 40 - חורף תשפ"א - 2021 - מועד א _____ 420
- 41 - חורף תשפ"א - 2021 - נבצרים _____ 427
- 42 - חורף תשפ"א - 2021 - נבצרים _____ 434
- 43 - קיץ תשפ"א - 2021 - מועד א _____ 441
- 44 - קיץ תשפ"א - 2021 - מיוחד _____ 448
- 45 - קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב _____ 455
- 46 - חורף תשפ"ב - 2022 _____ 462
- 47 - חורף תשפ"ב - 2022 - נבצרים _____ 469
- 48 - קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד א _____ 476
- 49 - קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד ב _____ 483
- 50 - חורף תשפ"ג - 2023 _____ 490
- 51 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד א _____ 497
- 52 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מיוחד _____ 504
- 53 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב _____ 510
- סיווג שאלות המבחנים _____ 523
- נוסחאון הבגרות לארבע יחידות _____ 528

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל בחלקו הראשון שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2013-2004 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון 482 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים כל 53 מבחני הבגרות לשאלון זה שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית עם פתרון מלא.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל , \in - שייך , \nearrow - עליה , \searrow - ירידה , even - זוגי , odd - לא זוגי
 \cup - איחוד: היחס 'או' , \cap - חיתוך: היחס 'וגם' , \emptyset - קבוצה ריקה (אין פתרון)
 $\sqrt{\quad}$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. - מוחלט , ep. - נקודת קצה (end point)
 'ללא הגבלת הכלליות' - קביעה ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך).

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוץ עריכה, או מטעם אישי של 'אסטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוץ עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו כוונה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי ברואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת לשריף אמארה מכפר ז'לפה ולשרון חיים מפתח תקוה.

את החללים שבין השאלות והפתרונות חִלְחַחְתִּי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדורות בעלות אופי לאומי או יהודי.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

א'ל' א'ט'כ

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 382-481-581-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הסקר ועל הפתרונות שמורות למחבר

אלגברה - סדרות - סדרה חשבונית - שאלות

1. (005, חורף ס"ו - 2006) נתונה סדרה חשבונית שבה $3n$ איברים.
 האיבר הנמצא במקום ה-21 גדול ב-66 מהאיבר הנמצא במקום ה-10.
 סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 5 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
 מצא את ערכו של האיבר הראשון. (22)
2. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד א) נתון כי סכום 30 האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שווה לסכום 20 האיברים הראשונים שלה.
 א. הראה כי סכום 50 האיברים הראשונים בסדרה הנתונה שווה לאפס.
 ב. הסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית עולה.
 מצא באיזה מקום בסדרה נמצא האיבר החיובי הראשון. (22)
3. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד ב) נתונה סדרה חשבונית: a_1, a_2, \dots, a_{2n} . הפרש הסדרה הוא d .
 סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הוא אפס.
 א. הוכח כי: $a_n = 0$
 ב. הבע באמצעות n ו- d את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. (22)
4. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) נתונה סדרה חשבונית: $120, 117, 114, \dots$
 א. מצא עבור אילו ערכים של n , סכום n האיברים בסדרה קטן מאפס.
 ב. האיבר האחרון בסדרה הוא -357. כמה איברים שליליים יש בסדרה? (23)
5. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) שני תלמידים קיבלו מאגר תרגילים במתמטיקה והיו צריכים להגיש את הפתרונות בסוף החופש.
 הם החלו לפתור את התרגילים באותו היום. אחד התלמידים פתר ביום הראשון 4 תרגילים, ובכל יום שאחריו פתר תרגיל אחד יותר מן היום הקודם לו. התלמיד השני עבד בקצב קבוע ופתר בכל יום 13 תרגילים. התלמיד השני סיים את העבודה שלושה ימים לפני הראשון.
 כמה תרגילים היו במאגר? (מצא את כל הפתרונות האפשריים). (23)

$$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$$

המספר הקטן ביותר בחזקת 4 ששווה לסכום 5 מספרים בחזקת 4

תהליך

1. $a_1 = 3$ 3. $Seven = dn$ 5. $S_1 = 130, S_2 = 39$
2. $n = 26$ 4. $n > 81$ ב. 119

6. (005, קיץ ס"ח - 2008, מועד א)

א. שני רוכבי אופניים, רוכב I ורוכב II, יצאו מיישוב A והגיעו ליישוב B.

רוכב I עבר בשעה הראשונה 3 km , ובכל שעה נוספת עבר 0.2 km יותר משעבר בשעה הקודמת.

רוכב II עבר בשעה הראשונה 5.75 km ובכל שעה נוספת - 0.3 km פחות משעבר בשעה הקודמת.

רוכב I רכב שעה אחת יותר מהזמן שרכב רוכב II. (23)

מצא את המרחק בין יישוב A ליישוב B, אם ידוע כי כל רוכב רכב מספר שלם של שעות.

ב. סעיף זה שייך לסדרה הנדסית. מובא שם.

7. (005, חורף ס"ט - 2009) נתונה סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא d , ואיברה הראשון הוא a_1 .

בסדרה יש 250 איברים. מהסדרה הנתונה מחקו את האיברים הנמצאים במקומות:

$3, 8, 13, 18, \dots, 248$. (כלומר נמחקו האיברים $a_3, a_8, a_{13}, a_{18}, \dots, a_{248}$)

האיברים שנמחקו מהווים סדרה חשבונית חדשה.

א. מצא כמה איברים נמחקו.

ב. הבע באמצעות d (ההפרש של הסדרה הנתונה) את ההפרש של סדרת האיברים שנמחקו.

ג. הסכום של כל האיברים בסדרה הנתונה (הכוללת גם את האיברים שנמחקו) הוא $13,000$.

נסמן: $2a_1 + 249d = k$. מצא את הערך של k .

ד. מצא את הסכום של האיברים שנמחקו. (24)

8. (005, חורף ס"ט - 2009, מועד מיוחד) בסדרה חשבונית $2n$ איברים.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה קטן פי 3 מסכום n האיברים האחרונים בסדרה.

סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הוא 27.

א. חשב את האיבר הראשון בסדרה, ואת הפרש הסדרה.

ב. חשב את סכום 30 האיברים הראשונים בסדרה. (24)

10:10

חפשו במרשקת, או בסתם פרסומת, תמונות של שעונים. רובם המכריע מצביעים על השעה: 10:10 ...

תשובות

6. א. 44 km

7. א. 50 ב. $5d$ ג. $k = 104$ ד. 2,600

8. א. $a_1 = 3, d = 6$ ב. $S_{30} = 2700$

9. (005, קיץ ס"ט - 2009, מועד א) סך התשלום עבור טלוויזיה מחולק ל-12 תשלומים חודשיים. התשלומים החודשיים מהווים סדרה חשבונית.

סך התשלום עבור הטלוויזיה גדול פי 1.52 מסך 6 התשלומים הראשונים, והוא גדול ב-1900 ש' מהסכום של שני התשלומים האמצעיים.

מצא את: א. ההפרש של הסדרה החשבונית ב. סך התשלום עבור הטלוויזיה (25)

10. (005, קיץ ס"ט - 2009, מועד ב) באולם שני אנפים: א' ו-ב'. בשני האגפים סידרו כיסאות בשורות.

באגף א' יש בשורה הראשונה כיסא אחד, ובכל שורה נוספת יש כיסא אחד יותר מאשר בשורה הקודמת. באגף ב' יש בשורה הראשונה 3 כיסאות, ובכל שורה נוספת יש כיסא אחד יותר מאשר בשורה הקודמת.

מספר השורות באגף ב' גדול ב-32 ממספר השורות באגף א',

ומספר הכיסאות באגף ב' גדול פי 25 ממספר הכיסאות באגף א'.

מצא את מספר השורות באגף א'. (25)

11. (005, סתיו תש"ע - 2010, מועד לוחמים) נתונה סדרה חשבונית a_1, a_2, a_3, \dots

שבה 48 איברים. לפניך שני סכומים (1) ו-(2) של איברים מסדרה זו:

$$(1) a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + \dots + a_{47} = 488$$

$$(2) a_1 + a_5 + a_9 + a_{13} + \dots + a_{45} = 348$$

א. מצא כמה איברים יש בכל אחד מהסכומים (1) ו-(2).

ב. מצא את האיבר הראשון, ואת ההפרש של הסדרה הנתונה a_1, a_2, a_3, \dots .

ג. מצא את סכום איברי הסדרה הנתונה המסתיימים בספרה 4. (25)

12. (005, קיץ תש"ע - 2010, מועד א)

נתונה סדרה חשבונית שבה 194 איברים. האיבר השביעי קטן ב-12 מהאיבר הרביעי.

הפכו את סימני האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים, ומהסדרה הנתונה התקבלה סדרה חדשה.

א. מצא את הפרש הסדרה הנתונה. ב. מצא את סכום הסדרה החדשה. (26)

תשובות

9. א. $d = -20_{sh}$ ב. 2280_{sh}

10. 8 (שורות)

11. א. 12, 16 (1) ב. $a_1 = 7, d = 1$ ג. $S = 170$

12. א. $d = -4$ ב. $S = 388$

13. (005, קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

נתונה סדרה: a_1, a_2, \dots, a_{2n} . האיבר הנמצא במקום ה- n בסדרה מקיים $a_n = 6n + 9$.
א. הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית.

ב. נתון כי סכום $2n$ האיברים בסדרה גדול פי 1.92 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים. מצא את n .

ג. המשיכו את הסדרה הנתונה עד a_{4n} . בסדרה של $4n$ האיברים מחקו את כל האיברים שמספר המקום שלהם מתחלק ב-4, כלומר האיברים a_4, a_8, a_{12}, \dots . מצא את סכום האיברים שנותרו בסדרה של $4n$ האיברים. (26)

14. (005, חורף תשע"א - 2011) נתונה סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא 2, ויש בה n איברים.

סכום כל איברי הסדרה גדול פי n מהאיבר שנמצא במקום ה-69 בסדרה.
א. מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. נתון גם כי $a_1 = -30$. מצא את סכום כל האיברים החיוביים בסדרה.

ג. (1) מבין האיברים החיוביים בסדרה, מצא את גודל האיבר הראשון המתחלק ב-6 ללא שארית, ואת גודל האיבר האחרון המתחלק ב-6 ללא שארית.

(2) מצא את מספר האיברים החיוביים בסדרה המתחלקים ב-6 ללא שארית. (27)

15. (005, קיץ תשע"א - 2011, לוחמים) גוף יוצא מנקודה A ונע בקו ישר.

במשך השניה הראשונה הגוף עובר מרחק של 50 מטרים, ובמשך כל שניה שאחריה, הוא עובר מרחק הקטן ב-2 מטרים מהמרחק שעבר במשך השניה שקדמה לה.

במשך השניה האחרונה לתנועתו הגוף עובר 2 מטרים, ואז הוא נעצר בנקודה B. לאחר העצירה הגוף חוזר מן הנקודה B לנקודה A בקו ישר.

במשך השניה הראשונה הוא עובר מרחק של 4 מטרים, ובמשך כל שניה שאחריה הוא עובר מרחק הגדול ב-3 מטרים מן המרחק שעבר במשך השניה שקדמה לה.

א. מהו המרחק מן הנקודה A לנקודה B?

ב. כמה שניות נדרשות לגוף כדי לעבור את הדרך חזרה מן הנקודה B לנקודה A? (27)



13. **א.** $n = 10$ **ב.** $S = 3870$

14. **א.** $n = 137$ **ב.** $S = 14,762$ **ג.** (1) $a_{136} = 240$, $a_{19} = 6$ (2) 40

15. **א.** 650_m **ב.** $20_{seconds}$

16. (006, קיץ ס"ד - 2004, מועד ב)

נתונות שתי סדרות חשבוניות: a_1, a_2, \dots, a_n ו- b_1, b_2, \dots, b_n
המקיימות: $a_1 = b_2, a_2 = b_3, \dots, a_n = b_{3n-1}$. הראה כי לכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n = b_{3n-1}$ ב. $3(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = b_1 + b_2 + \dots + b_{3n}$ (28)

17. (005, חורף תשע"ב - 2012)

היקף המכירות של עסק מסוים מסתכם בכל יום עסקים בסכום קבוע של 2000 שקלים. בחורף ההוצאות של העסק גדלו בכל יום עסקים החל מהיום הראשון של החורף והיוו סדרה חשבונית. ביום הראשון של החורף היו ההוצאות 75 שקלים, וביום השני - 125 שקלים. מצא כעבור כמה ימי עסקים מתחילת החורף יהיה הרווח הכולל של העסק 38,025 שקלים.

(28)

18. (005, חורף תשע"ג - 2013)

נתונה סדרה חשבונית שהפרשה הוא d , ואיברה הראשון הוא a_1 . סכום 21 האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

א. מצא את הערך של $a_1 + 20d$.

ב. נתון כי a_1 הוא שלילי. קבע אם הסדרה עולה או יורדת. נמק.

ג. לכל איבר בסדרה הנתונה הוסיפו את המספר המציין את מקומו בסדרה:

לאיבר הראשון הוסיפו 1, לאיבר השני הוסיפו 2 וכן הלאה. כך נוצרה סדרה חדשה.

הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה החדשה גדול ב- 861 מסכום n

האיברים הראשונים בסדרה הנתונה. (29)

(1) חשב את n .

(2) היעזר בתשובתך לסעיף א, ומצא את סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה.

הסדרה ההרמונית

הסדרה הבאה: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \dots$ נקראה סדרה הרמונית.

מה שמפתיע בסדרה זו הוא שהסכום שלה הינו אינסוף! אם נבחר מספר גדול כרצוננו, נניח k

- אזי אם נחבר מספיק איברים של הסדרה ההרמונית, נקבל מספר הגדול ממנו:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n} > k$$



17. 39 (ימי עסקים)

18. א. $a_1 + 20d = 0$ ב. עולה ג. (1) $n = 41$ (2) $S_{41} = 0$

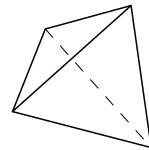
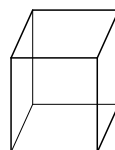
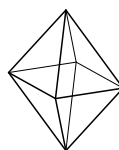
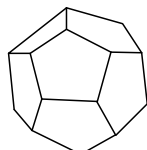
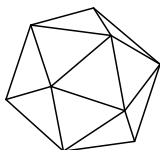
נתונה סדרה חשבונית. האיבר במקום ה-30 גדול ב-96 מהאיבר במקום ה-6. סכום $2n$ האיברים הראשונים בסדרה גדול פי 4 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

א. מצא את הפרש הסדרה ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מחקו את $2n$ האיברים הראשונים בסדרה הנתונה. (29)

הבע באמצעות n את הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה שנשארה לאחר המחיקה.

קיימים רק חמישה גופים מרחביים משוכללים. הגופים קרויים בלועזית על שם מספר הפאות שלהם. חלקו הראשון של השם הוא מספר הפאות ביונית, וחלקו השני של השם הוא 'ארד' - פאה.



שם	פאות	קודקודים	מקצועות	תאור
טטראדר (ארבעון)	4	4	6	פירמידה ישרה, משולשת ומשוכללת
הקסאדר	6	8	12	קוביה
אוקטאדר (תמנון)	8	6	12	שתי פירמידות ישרות מרובעות ומשוכללות המחוברות בבסיסן
דדוקסאדר (תריסריון)	12	20	30	פאות מחומשות משוכללות. כל שלוש פאות נפגשות בקודקוד אחד
איקסאדר (עשירמון)	20	12	30	פאות משולשות משוכללות. כל חמש פאות נפגשות בקודקוד אחד

משפט הפאונים של אוילר: סכום מספר הקודקודים ומספר הפאות גדול ב-2 ממספר המקצועות. בכל פאון קמור.

$$V + F - E = 2 \iff E - \text{מספר הפאות} ; F - \text{מספר הקודקודים} ; E - \text{מספר המקצועות}$$

תשמעו סיפור: שאלה שנשאלה במבחן הפסיכומטרי האמריקאי (S.A.T.): נתונים טטראדר ואוקטאדר בעלי פאות חופפות.

הדביקו פאה לפאה והתקבל גוף חדש. כמה פאות לגוף החדש? התשובה המיידית שכמעט כל הנבחנים ענו היא 10 פאות:

לטטראדר 4 פאות; לאוקטאדר 8 פאות; שתי פאות 'התבזבזו' על ההדבקה \iff נשארו 10 פאות. אחד התלמידים חשב

שאם שאלה זו הופיעה בין השאלות האחרונות - לא יתכן שהתשובה עליה כה פשוטה. הוא התעמק בבעיה וענה: 7 פאות!

התלמיד קיבל במבחן ציון 99. כשבירר היכן טעה, נענה כי היה זה בשאלה זו. התלמיד התעקש שתשובתו נכונה, והבוחנים

דחו את עירעורו. גם אביו של התלמיד, שהיה מרען בעצמו, טען לצדקת הבוחנים. התלמיד בנה מודל של הגופים והוכיח

את צדקתו. העניין הגיע עד לבית המשפט שפסק כי התלמיד צודק. הבוחנים נאלצו להוסיף לו את הנקודה החסרה, אך

הורידו נקודה אחת לכל שאר הנבחנים...

טוב, אז איך זה בכל זאת יכול להיות? התשובה היא כי שתי פאות באמת נגרעו מההדבקה. כל אחת משלושת הפאות

האחרות של הטטראדר התלכדה עם אחת מפאות האוקטאדר, כך שיש להפחית שלוש פאות מתוך ה-10 שנשארו.

אלגברה - סדרות - סדרה חשבונית - פתרונות

.1

$$(I) a_{21} = a_{10} + 66$$

$$(II) S_{3n} - S_{2n} = 5 S_n$$

$$(I) a_1 + 20d = a_1 + 9d + 66 \Rightarrow 11d = 66 \Rightarrow \underline{d = 6}$$

$$(II) \frac{3n}{2}(2a_1 + 6(3n - 1)) - \frac{2n}{2}(2a_1 + 6(2n - 1)) = 5 \cdot \frac{n}{2}(2a_1 + 6(n - 1)) \quad / : \frac{2}{n}$$

$$3(2a_1 + 18n - 6) - 2(2a_1 + 12n - 6) = 5(2a_1 + 6n - 6)$$

$$6a_1 + 54n - 18 - 4a_1 - 24n + 12 = 10a_1 + 30n - 30$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 6 = 10a_1 - 30 \Rightarrow -8a_1 = -24 \Rightarrow \underline{a_1 = 3}$$

.2 א.

$$S_{30} = S_{20} \Rightarrow \frac{30}{2}(2a_1 + 29d) = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d)$$

$$30a_1 + 435d = 20a_1 + 190d$$

$$10a_1 = -245d \Rightarrow a_1 = -24.5d$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2a_1 + 49d) = 25 \cdot 2 \cdot (-24.5d) + 49d = 25(-49d + 49d) = 25 \cdot 0 \Rightarrow \underline{S_{50} = 0} \quad (\checkmark)$$

.3 ב.

$$a_i \nearrow \Rightarrow d > 0, a_n \stackrel{?}{>} 0$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = -24.5d + dn - d = dn - 25.5d = d(n - 25.5) > 0 \quad / : d_{(>0)}$$

$$\Rightarrow n - 25.5 > 0 \Rightarrow n > 25.5 \Rightarrow \underline{n = 26}$$

.3 א. סימון: even - זוגי, odd - לא זוגי

$$S_{\text{odd}} = \frac{n}{2}(2a_1 + 2d(n - 1)) = 0, n \neq 0 \Rightarrow 2a_1 + 2d(n - 1) = 0 \quad / : 2$$

$$\Rightarrow a_1 + d(n - 1) = 0, a_n = a_1 + d(n - 1) \Rightarrow \underline{a_n = 0} \quad (\checkmark)$$

.3 ב.

$$S_{\text{even}} = \frac{n}{2}(2a_2 + 2d(n - 1)) = \frac{n}{2}(2(a_1 + d) + 2dn - 2d) = \frac{n}{2}(2a_1 + 2d + 2dn - 2d)$$

$$= n(\underline{a_1 + d + dn - d}) = n(\underline{a_1 + d(n - 1) + d}) = n(\underline{a_n + d}) = n(0 + d)$$

$$\Rightarrow \underline{S_{\text{even}} = dn}$$

$$a_1 = 120, \quad d = 117 - 120 = -3, \quad S_n < 0 \quad \text{א. 4}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 120 - 3(n-1)) < 0 \quad / \cdot 2 \Rightarrow n(243 - 3n) < 0 \quad / : 3 \Rightarrow n(81 - n) < 0$$

$$a = -1 < 0, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 81 \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{0} \end{array} \overset{+}{\text{---}} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{81} \end{array} \text{---} \quad n > 0 \Rightarrow n > 81$$

ב.

$$a_n = -357 = 120 - 3(n-1) \Rightarrow 3(n-1) = 477 \Rightarrow n-1 = 159 \Rightarrow \underline{n = 160}$$

$$a_n < 0 \Rightarrow 120 - 3(n-1) < 0 \Rightarrow -3(n-1) < -120 \Rightarrow n-1 > 40 \Rightarrow n > 41$$

$$\Rightarrow n = 42, 43, \dots, 159, 160 \Rightarrow N = 160 - 41 \Rightarrow \underline{N = 119}$$

5. התלמיד הראשון (I) עבד n ימים \Leftarrow התלמיד השני (II) עבד $(n-3)$ ימים.

$$S_{n_I} = \frac{n}{2}(2 \cdot 4 + 1 \cdot (n-1)) \quad \text{סכום סדרה חשבונית}$$

$$S_{n_{II}} = 13 \cdot (n-3)$$

$$S_{n_I} = S_{n_{II}} \Rightarrow \frac{n}{2}(8+n-1) = 13n-39 \quad / \cdot 2 \Rightarrow n(7+n) = 26n-78$$

$$7n+n^2 = 26n-78 \Rightarrow n^2-19n+78=0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{19 \pm 7}{2} \Rightarrow n_1 = 13, \quad n_2 = 6$$

$$S_1 = 13 \cdot (13-3) \Rightarrow \underline{S_1 = 130}, \quad S_2 = 13 \cdot (6-3) \Rightarrow \underline{S_2 = 39}$$

6. א. רוכב א' רכב n שעות, ורוכב ב' רכב $(n-1)$ שעות. המרחק הוא סכום סדרות חשבוניות:

$$\underline{I}: a_1 = 3, \quad d = 0.2 \Rightarrow AB = S_n = \frac{n}{2}(6 + 0.2(n-1))$$

$$\underline{II}: a_1 = 5.75, \quad d = -0.3 \Rightarrow AB = S_{n-1} = \frac{n-1}{2}(11.5 - 0.3(n-2))$$

$$\frac{n}{2}(6 + 0.2(n-1)) = \frac{n-1}{2}(11.5 - 0.3(n-2)) \quad / \cdot 2$$

$$n(5.8 + 0.2n) = (n-1)(12.1 - 0.3n) \Rightarrow 5.8n + 0.2n^2 = 12.1n - 0.3n^2 - 12.1 + 0.3n$$

$$0.5n^2 - 6.6n + 12.1 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{6.6 \pm 4.4}{1} \Rightarrow n_1 = 11, \quad n_2 = 2.2 \Rightarrow \underline{n = 11}$$

$$AB = \frac{11}{2}(5.8 + 0.2 \cdot 11) \Rightarrow \underline{AB = 44 \text{ km}}$$

המילה 'חשבון' מופיעה בתורה כשם עירו של סיחון. מלך האמורי.
עיר זו נכבשה על ידו מידי מלך מואב הראשון (זה שלפני בלק).

7. א. סדרת האינדקסים $3, 8, 13, \dots$ היא סדרה חשבונית בעצמה.

נסמן את איבריה ב־ b ואת הפרשה ב־ d_b . נמצא את מספר איבריה:

$$b_1 = 3, b_n = 248, d_b = 5 \Rightarrow 248 = 3 + 5 \cdot (n - 1) = 5n - 2$$

$$\Rightarrow 5n = 250 \Rightarrow n = 50$$

ב. נסמן את סדרת האיברים שנמחקו ב־ c (בסעיף ד') ואת הפרש סדרת האיברים שנמחקו ב־ d_c .

$$d_c = a_n - a_{n-5} = a_1 + d(n-1) - (a_1 + d(n-6))$$

$$= a_1 + dn - d - a_1 - dn + 6d \Rightarrow d_c = 5d$$

ג.

$$S_{250} = \frac{250}{2} \cdot (2a_1 + 249d) = 125 \cdot k = 13,000 \Rightarrow k = 104$$

ד.

$$S_{50(c)} = \frac{50}{2} \cdot (2a_3 + 5d \cdot 49) = 25 \cdot (2(a_1 + 2d) + 245d)$$

$$= 25 \cdot (2a_1 + 249d) = 25 \cdot 104 \Rightarrow S_{50(c)} = 2600$$

8. א. (I) $3 \cdot S_n = S_{2n} - S_n \Rightarrow 4 S_n = S_{2n}$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{n}{2} (2a_1 + d(n-1)) = \frac{2n}{2} (2a_1 + d(2n-1)) \quad / : n$$

$$\Rightarrow 2(2a_1 + dn - d) = 2a_1 + 2dn - d \quad / - 2dn$$

$$\Rightarrow 4a_1 - 2d = 2a_1 - d \Rightarrow 2a_1 = d$$

(II) $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d = 27 \Rightarrow a_1 + d = 9$

$$\Rightarrow^{(I)} a_1 + 2a_1 = 9 \Rightarrow a_1 = 3, d = 6$$

ב.

$$S_{30} = \frac{30}{2} \cdot (2 \cdot 3 + 6 \cdot 29) \Rightarrow S_{30} = 2700$$

תשובה של חיים ויצמן

חיים ויצמן (1874-1952), איש התנועה הציונית ונשיאה הראשון של מדינת ישראל.

מספר שנים לפני הצהרת בלפור שאל אותו חבר בית הלורדים האנגלי:

"מדוע אתם היהודים מתעקשים על פלשתינה, כאשר ישנן כל-כך הרבה מדינות לא-מפותחות בהן אתם יכולים

להתיישב בנוחות רבה יותר?"

ענה לו ויצמן: "זה כמו שאני אשאל אותך מדוע נסעת בסוף השבוע שלושים קילומטר כדי לבקר את אמא שלך,

כשיש כל כך הרבה זקנות שגרות ממש ברחוב שלך" . . .

$$(I) S_{12} = 1.52 S_6 \Rightarrow \frac{12}{2} \cdot (2a_1 + 11d) = 1.52 \cdot \frac{6}{2} \cdot (2a_1 + 5d) \quad \text{א. 9}$$

$$12a_1 + 66d = 9.12a_1 + 22.8d \Rightarrow 2.88a_1 = -43.2d \Rightarrow a_1 = -15d$$

$$(II) S_{12} = a_6 + a_7 + 1900 \Rightarrow \frac{12}{2} \cdot (2a_1 + 11d) = a_1 + 5d + a_1 + 6d + 1900$$

$$12a_1 + 66d = 2a_1 + 11d + 1900 \Rightarrow 10a_1 + 55d = 1900$$

$$10 \cdot (-15d) + 55d = 1900 \Rightarrow -95d = 1900 \Rightarrow d = -20_{sh}$$

ב.

$$(*) 10a_1 + 55 \cdot (-20) = 1900 \Rightarrow 10a_1 = 3000 \Rightarrow a_1 = 300_{sh}$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} \cdot (2 \cdot 300 - 11 \cdot 20) = 6(600 - 220) = 6 \cdot 380 \Rightarrow S_{12} = 2280_{sh}$$

10. נסמן: n - מספר השורות באגף א' (A) \Leftarrow $(n+32)$ - מספר השורות באגף ב' (B)

$$S_A = S_n = \frac{n}{2}(1+n), \quad S_B = \frac{n+32}{2}(2 \cdot 3 + 1 \cdot (n+32-1)) = \frac{n+32}{2}(n+37)$$

$$S_B = 25 S_A \Rightarrow \frac{n+32}{2}(n+37) = 25 \cdot \frac{n}{2}(1+n) \quad / \cdot 2 \Rightarrow (n+32)(n+37) = 25n(1+n)$$

$$n^2 + 37n + 32n + 1184 = 25n + 25n^2 \Rightarrow 24n^2 - 44n - 1184 = 0 \quad / : 4$$

$$6n^2 - 11n - 296 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{11 \pm 85}{12}, \quad n > 0 \Rightarrow n = \frac{11+85}{12} = \frac{96}{12} \Rightarrow n = 8 \quad (\text{שורות})$$

א. 11

$$(1) 2, 5, 8, \dots, 47 \Rightarrow a_1 = 2, d = 3, a_n = 47 \Rightarrow 47 = 2 + 3(n-1) \Rightarrow n = 16$$

$$(2) 1, 5, 9, \dots, 45 \Rightarrow a_1 = 1, d = 4, a_n = 45 \Rightarrow 45 = 1 + 4(n-1) \Rightarrow n = 12$$

ב.

$$S_{(1)} = \frac{16}{2}(2(a_1 + d) + 3d(16-1)) = 488 \Rightarrow 8(2a_1 + 47d) = 488 \Rightarrow (I) 2a_1 + 47d = 61$$

$$S_{(2)} = \frac{12}{2}(2a_1 + 4d(12-1)) = 348 \Rightarrow 6(2a_1 + 44d) = 348 \Rightarrow (II) 2a_1 + 44d = 58$$

$$(I) - (II) \Rightarrow 3d = 3 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (I) 2a_1 + 47 = 61 \Rightarrow 2a_1 = 14 \Rightarrow a_1 = 7$$

ג.

$$a_n = 14 = 7 + 1 \cdot (n-1) \Rightarrow n = 8$$

$$a_8 + a_{18} + a_{28} + a_{38} + a_{48} = 14 + 24 + 34 + 44 + 54 = \frac{5}{2}(14 + 54) \Rightarrow S = 170$$

$$S_n = n \cdot a_{69} \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + 2(n-1)) = n \cdot (a_1 + 2 \cdot 68) / : n \quad \text{א. 14}$$

$$a_1 + n - 1 = a_1 + 136 / - a_1 + 1 \Rightarrow n = 137$$

ב. k להלן טבעי, מציין אינדקס איבר בסדרה.

$$a_k > 0 \Rightarrow -30 + 2(k-1) > 0 \Rightarrow 2(k-1) > 30 \Rightarrow k-1 > 15 \Rightarrow k > 16 \Rightarrow k = 17$$

$$\begin{aligned} a_{17} + a_{18} + \dots + a_{137} &= S_{137} - S_{16} = \frac{137}{2}(-60 + 2 \cdot 136) - \frac{16}{2}(-60 + 2 \cdot 15) \\ &= 14,522 - (-240) \Rightarrow S = 14,762 \end{aligned}$$

ג. (1)

$$a_{17} = -30 + 2 \cdot 16 = 2 \Rightarrow a_{19} = 2 + 2 \cdot 2 = 6 \Rightarrow a_{19} = 6$$

$$a_{137} = -30 + 2 \cdot 136 = 242 \Rightarrow a_{136} = 242 - 2 = 240 = 6 \cdot 40 \Rightarrow a_{136} = 240$$

ד. p להלן טבעי, מציין אינדקס איבר בסדרה (שקול למספר האיברים המתחלקים ב-6).

$$6 + 12 + 18 + \dots + 240 \Rightarrow 240 = 6 + 6 \cdot (p-1)$$

$$\Rightarrow 234 = 6(p-1) \Rightarrow 39 = p-1 \Rightarrow p = 40$$

א. 15

$$a_1 = 50, d = -2, a_n = 2$$

$$2 = 50 - 2(n-1) \Rightarrow 2 = 50 - 2n + 2 \Rightarrow 2n = 50 \Rightarrow n = 25$$

$$\Rightarrow S = S_{25} = \frac{25}{2} \cdot (50 + 2) = \frac{25 \cdot 52}{2} \Rightarrow S = 650m$$

ב.

$$a_1 = 4, d = 3, S_n = 650 \Rightarrow \frac{n}{2}(2 \cdot 4 + 3(n-1)) = 650 \Rightarrow n(3n+5) = 1300$$

$$3n^2 + 5n - 1300 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-5 \pm 125}{6}, n > 0 \Rightarrow n = \frac{120}{6} \Rightarrow n = 20 \text{ seconds}$$

ילדים מתמטיקאים



מרטיין גרדנר (1914-2010) היה מלך החידות האמריקאי ברור האחרון.

נפטר בגיל 95.

כתב עשרות ספרים וטורים בעיתונות שעסקו במדע פופולארי.

בחידות מתמטיות, חידות חשיבה ובקסמים.

אמרו עליו שהוא הפך הרבה ילדים למתמטיקאים, והרבה מתמטיקאים לילדים...

16. א. נסמן: d_a - הפרש הסדרה a ; d_b - הפרש הסדרה b ; צ"ל: $a_n = b_{3n-1}$

$$a_1 = b_2 = b_1 + d_b ; a_2 = b_5 = b_1 + 4d_b$$

$$d_a = a_2 - a_1 = (b_1 + 4d_b) - (b_1 + d_b) = 3d_b$$

$$a_n = a_1 + d_a(n-1) = b_1 + d_b + 3d_b(n-1) = b_1 + 3d_b n - 2d_b = b_1 + d_b(3n-2)$$

$$= b_1 + d_b((3n-1) - 1) = b_{3n-1} \Rightarrow a_n = b_{3n-1} (\checkmark)$$

ב. צ"ל: $3 S_{n(a)} = S_{3n(b)}$

$$3 S_{n(a)} = 3 \cdot \frac{n}{2} (2a_1 + d_a(n-1)) = \frac{3n}{2} (2(b_1 + d_b) + 3d_b(n-1))$$

$$= \frac{3n}{2} (2b_1 + 2d_b + 3d_b n - 3d_b) = \frac{3n}{2} (2b_1 + d_b(3n-1)) = S_{3n}$$

$$\Rightarrow 3 S_{n(a)} = S_{3n(b)} (\checkmark)$$

17. ההוצאות עבור n ימי עסקים ראשונים בחורף:

$$a_1 = 75 , d = 125 - 75 = 50$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (2 \cdot 75 + 50(n-1)) = \frac{n}{2} (50n + 100) = n(25n + 50)$$

היקף המכירות ב- n ימי עסקים הוא: $2000n$ שקלים,

מכאן שהרווח ב- n ימי העסקים הראשונים של החורף הוא: $2000n - n(25n + 50)$

$$2000n - n(25n + 50) = 38025 \quad / : 25 \Rightarrow 80n - n(n+2) = 1521 \Rightarrow -n^2 + 78n - 1521 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-78 \pm 0}{-2} \Rightarrow n = 39 \text{ (ימי עסקים)}$$

יש להם סבלנות...



הטור: $\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \dots$ גל בקצב כל כך איטי.

עד שכדי להגיע לסכום שיהיה גדול מ- 10 יש לסכום 10^{4300} ספרות !!!

וזה עוד כלום לעומת הטור הזה: $\frac{1}{3 \log 3 \log \log 3} + \frac{1}{4 \log 4 \log \log 4} + \dots$

שבו, כדי להגיע לסכום שיהיה גדול מ- 10 יש לסכום 10^{100} ספרות !!!

א. 18

$$S_{21} = S_{20} \Rightarrow \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \Rightarrow 42a_1 + 420d = 40a_1 + 380d$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 40d = 0 \Rightarrow a_1 + 20d = 0$$

אפשר גם:

$$S_{21} = S_{20} \Rightarrow a_{21} = 0, a_{21} = a_1 + 20d \Rightarrow a_1 + 20d = 0$$

ב.

$$a_1 + 20d = 0 \Rightarrow d = -\frac{a_1}{20}, a_1 < 0 \Rightarrow d = -\frac{-}{+} = + \Rightarrow \nearrow \text{(עולה)}$$

ג. (1)

ההפרש הוא בדיוק סכום כל המספרים שנוספו לאיברי הסדרה:

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n = 861 \Rightarrow \frac{n}{2}(1+n) = 861 \Rightarrow n + n^2 = 1722$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 1722 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm 83}{2}, n > 0 \Rightarrow n = \frac{82}{2} \Rightarrow n = 41$$

(2)

$$S_{41} = \frac{41}{2} \cdot (2a_1 + 40d) = 41 \cdot (a_1 + 20d) = 41 \cdot 0 \Rightarrow S_{41} = 0$$

א. 19

$$(I) a_{30} = a_6 + 96 \Rightarrow a_1 + 29d = a_1 + 5d + 96 \Rightarrow 24d = 96 \Rightarrow d = 4$$

$$(II) S_{2n} = 4 \cdot S_n \Rightarrow \frac{2n}{2}(2a_1 + 4(2n-1)) = 4 \cdot \frac{n}{2}(2a_1 + 4(n-1))$$

$$\Rightarrow n(2a_1 + 8n - 4) = 2n(2a_1 + 4n - 4) \quad / : n$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 8n - 4 = 4a_1 + 8n - 8$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 4 = 4a_1 - 8 \Rightarrow -2a_1 = -4 \Rightarrow a_1 = 2$$

ב.

$$S = S_{3n} - S_{2n} = \frac{3n}{2}(2 \cdot 2 + 4(3n-1)) - \frac{2n}{2}(2 \cdot 2 + 4(2n-1))$$

$$= \frac{3n}{2}(A + 12n - A) - n(A + 8n - A) = 18n^2 - 8n^2 \Rightarrow S = 10n^2$$

אמונה טפלה

פרופסור **נילס בוהר** (1885-1962) היה פיסיקאי דני ממוצא יהודי, מדען גרעין, חתן פרס נובל לפיסיקה (1922).

במשדרו היתה תלוית פרסת סוס שאמונה טפלה מייחסת לה הגנה מפני 'עין הרע'.

כשנשאל על-ידי מבקר נדהם האם הוא מאמין באותה אמונה טפלה,

השיב בוהר שהוא בוודאי אינו מאמין בכך, אבל הוא שמע שזה עוזר גם אם אתה אינך מאמין. ...

מבחן 53 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות מהשאלות 1-5. לפחות שאלה אחת מכל פרק.

פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב

סדרות

1. נתונה סדרה חשבונית a_n בת n איברים.

נתון: $a_1 = -10$, $a_3 = -4$.

סכום כל איברי הסדרה הוא 4,218.

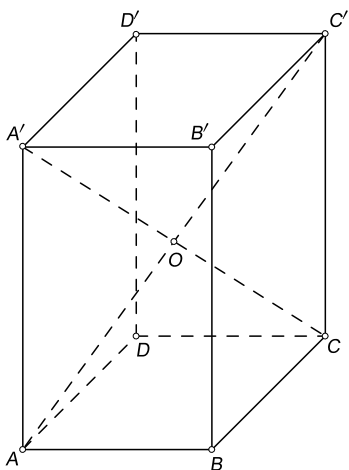
א. מצא את n .

מחקו כל איבר שלישי בסדרה a_n (כלומר: מחקו את האיברים a_3, a_6, \dots).

ב. (1) כמה איברים נמחקו מן הסדרה a_n ?

(2) מהו סכום האיברים שנמחקו מן הסדרה a_n ?

(3) מהו סכום האיברים שנשארו בסדרה a_n אחרי המחיקה?



טריגונומטריה במרחב

2. נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

נתון כי אלכסון התיבה גדול פי $\sqrt{3}$ מאלכסון הבסיס.

א. מצא את גודל הזווית בין אלכסון התיבה לבסיס.

נתון כי שטח המלבן $ACC'A'$ הוא $128\sqrt{2}$.

ב. (1) מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה.

(2) מצא את אורך האלכסון של התיבה.

אלכסוני התיבה $A'C$ ו- $C'A$ נפגשים בנקודה O .

ג. מצא את שטח המעטפת של הפירמידה הישרה $OABCD$.

"כל מה שהיה יכול להיות מומצא - כבר הומצא". הממונה על משרד הפטנטים האמריקאי. 1899.

"לטלפון יש יותר מידי מגרעות מכדי לשמש אמצעי תקשורת". מנהל חבר התקשורת הגדולה או. 1876.

"אני חושב שיש שוק עולמי לאולי חמשה מחשבים". יושב ראש IBM. 1943.

"מוזיקת גיטרה בדרך החוצה". חברת התקליטים שדחתה את להקת החיפושיות. 1962.



1. א. $n = 57$ (1) 19 (2) 1,463 (3) 2,755

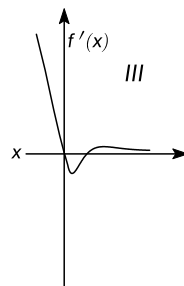
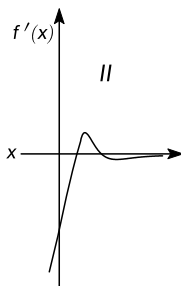
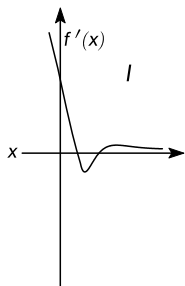
2. א. 54.74° (1) 8 (2) $A'C = 8\sqrt{6}$ (3) $S = 64\sqrt{5}$ (יחידות ריבועיות)

פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה

3. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + x - \sin 2x$, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.
 - מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי הישר המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף ג ועל-ידי ציר y .
(בתחום הנתון המשיק פוגש את גרף הפונקציה רק בנקודת ההשקה.)

4. נתונה הפונקציה $f(x) = (2x^2 - 15x + 27) \cdot e^{5-x}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- אחד הגרפים שלפניך מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבע איזה מהם הוא זה. נמק.



- קבע עבור אילו ערכי x מתקיים $f(x) < 0$ וגם $f'(x) < 0$. נמק.
- חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל-ידי ציר x .

תשובות

- $\max_{ep.}(0, 1)$, $\min(\frac{\pi}{6}, 0.66)$, $\max(\frac{5\pi}{6}, 4.48)$, $\min_{ep.}(\pi, 4.14)$
 - $y = x$ $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.29$ (יחידה ריבועית)
- $\forall x$ **א.** (1) $(4\frac{1}{2}, 0)$ **ב.** $(3, 0)$, $(0, 27e^5)$ **(2)** $\max(6, 3.31)$, $\min(3\frac{1}{2}, -4.48)$
 - ג.** $3 < x < 3\frac{1}{2}$ **ה.** $S = 7.79$ (יחידות ריבועיות)

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{4x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$

ועל-ידי הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

ה. (1) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

(2) מצא ערך c שעבורו השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$

ועל-ידי הישר $y = c$ שווה ל- S . נמק.

בהצלחה

כות היצרים שמונה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

1729

כשהמתמטיקאי הבריטי **גודפרי הארולד הארדי** (1877-1947) ביקר את המתמטיקאי ההודי **סריניוואסה רמנוג'אן** (1877-1920) בחוליו, הוא העיר שהגיע במונית שמספרה 1729, מספר סתמי ללא ייחודיות והוא מקווה שזה אינו סימן רע. על כך ענה לו רמנוג'אן, שזה ממש אינו נכון. מספר זה הוא הקטן ביותר שניתן להציגו כסכום של שני מספרים מעוקבים בשתי דרכים שונות: $1729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$.

המספר הקטן ביותר שניתן להציגו בשלוש דרכים שונות כסכום של שני מעוקבים הוא 87, 539, 319:

$$87, 539, 319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$$

מתברר שלמספר הזה יש עוד מספר תכונות ייחודיות.

המהמקום ה-1729 שאחרי הנקודה של e מופיע לראשונה רצף של 10 ספרות שהן כל הספרות מ-0 עד 9:

$$e = 2.71828 \dots \overset{\downarrow}{588970} 719425863987727547109 \dots$$

זהו גם המספר הגדול ביותר ששווה למכפלה של סכום ספרותיו באותו סכום הרשום הפוך:

$$1 + 7 + 2 + 9 = 19, \quad 19 \times 91 = 1729$$

ואלו אינן התכונות המיוחדות היחידות שלו . . .



5. א. $x > 0$ ב. $(1, 0)$ ג. $\min(e^2, \frac{1}{e^2})$, $\max(1, 0)$ ה. (1) $y = \frac{1}{e^2}$ (2) $c = -\frac{1}{e^2}$

פתרון מבחן 53

1. א.

$$a_1 = -10, \quad a_3 = a_1 + 2d = -10 + 2d = -4 \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot (-10) + 3(n-1)) = 4,218 \quad / \cdot 2 \Rightarrow n \cdot (-20 + 3n - 3) = 8,436$$

$$n \cdot (3n - 23) = 8,436 \quad / - 8,436 \Rightarrow 3n^2 - 23n - 8,436 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{23 \pm 319}{6}, \quad n > 0 \Rightarrow n = \frac{23 + 319}{6} = \frac{342}{6} \Rightarrow n = 57$$

ב. (1) נסמן את מספר האיברים שנמחקו ב- m

$$3, 6, 9, \dots, 57 \Rightarrow 57 = 3 + 3 \cdot (m-1) \Rightarrow 57 = 3 + 3m - 3 \quad / : 3 \Rightarrow m = 19$$

(2) נסמן את הסדרה החדשה (האיברים שנמחקו) ב- b_n . הפרש הסדרה הוא $b_1 = 3d = 3 \cdot 3 = 9$

$$b_1 = a_3 = -4$$

$$S_{b(19)} = \frac{19}{2} (2 \cdot (-4) + 9 \cdot 18) = \frac{19}{2} \cdot (-8 + 162) \Rightarrow S_{b(19)} = 1,463$$

(3)

$$S_{57} - S_{b(19)} = 4,218 - 1463 = 2,755$$

2.

$$\underline{\triangle A'AC}: \cos \gamma = \frac{AC}{A'C} = \frac{AC}{\sqrt{3} \cdot AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = 54.74^\circ$$

ב. (1)

$$AB = x \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

$$A'C = \sqrt{3} \cdot AC = \sqrt{3} \cdot x\sqrt{2} = x\sqrt{6}$$

$$\underline{\triangle A'AC}: AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{6x^2 - 2x^2} = \sqrt{4x^2} = 2x$$

$$S_{\triangle ACC'A'} = AA' \cdot AC = 2x \cdot x\sqrt{2} = 2x^2\sqrt{2} \quad / : 2 \quad / : \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

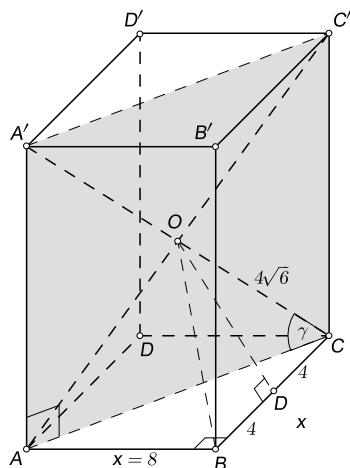
(2)

$$A'C = x\sqrt{6} \Rightarrow A'C = 8\sqrt{6}$$

$$OC = OB = \frac{A'C}{2} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6}$$

$$\underline{\triangle ODC}: OD = \sqrt{16 \cdot 6 - 16} = \sqrt{80}$$

$$S = 4 \cdot S_{\triangle OBC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{80} = 16 \cdot \sqrt{80} = 16 \cdot \sqrt{16 \cdot 5} = 16 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} \Rightarrow S = 64\sqrt{5} \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$



ג. אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה:

3. א.

$$f(x) = 1 + x - \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$f'(x) = 1 - 2 \cos 2x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 2 \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

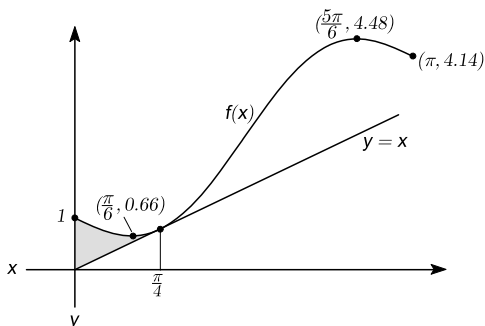
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f'		-	0	+	0	-	
f	max _{ep.}	\	min	/	max	\	min _{ep.}

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.66$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4.48, \quad f(\pi) = 1 + \pi = 4.14$$

$$\max_{ep.}(0, 1), \quad \min\left(\frac{\pi}{6}, 0.66\right)$$

$$\max\left(\frac{5\pi}{6}, 4.48\right), \quad \min_{ep.}(\pi, 4.14)$$



ב.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{4}, \quad m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \cos \frac{\pi}{2} = 1$$

$$m = 1, \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y - \frac{\pi}{4} = 1 \cdot (x - \frac{\pi}{4}) / + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = x$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + x - \sin 2x - x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2x) dx = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0\right) - \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \Rightarrow S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.29 \quad (\text{יחידה ריבועית})$$

ד.

פסוק יב בתהלים פה מתחיל במילים:

"אֵמֶת מֵאֲרֶץ תִּצְמַח"

קרא את האותיות לפי צבען:

א מ ת מ א ר ץ ת צ מ ה

$$f(x) = (2x^2 - 15x + 27) \cdot e^{5-x}, \quad \forall x$$

ב. (1)

$$x = 0 \Rightarrow y = 27 \cdot e^5 \Rightarrow (0, 27e^5)$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 15x + 27 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{4} = \frac{15 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow (3, 0), \quad (4\frac{1}{2}, 0)$$

(2)

$$f'(x) = (4x - 15) \cdot e^{5-x} + (2x^2 - 15x + 27) \cdot e^{5-x} \cdot (-1)$$

$$= e^{5-x} \cdot (4x - 15 - 2x^2 + 15x - 27) = \boxed{e^{5-x} \cdot (-2x^2 + 19x - 42)} \stackrel{?}{=} 0$$

$$-2x^2 + 19x - 42 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 336}}{-4} = \frac{-19 \pm 5}{-4} \Rightarrow x_1 = \frac{-14}{-4} = 3\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-24}{-4} = 6$$

x		$3\frac{1}{2}$		6	
f'	+ - - -	0	+ + + +	0	+ - - -
f	\	min	/	max	\

$$f(3\frac{1}{2}) = (24.5 - 52.5 + 27) \cdot e^{1.5} = -4.48, \quad f(6) = (72 - 90 + 27) \cdot e^{-1} = 3.31$$

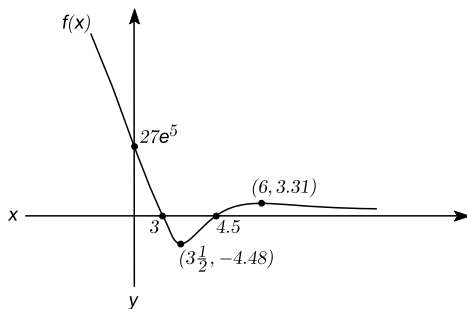
$$\Rightarrow \min(3\frac{1}{2}, -4.48), \quad \max(6, 3.31)$$

גרף זה אינו פרופורציונלי לגרף

האמיתי, בניגוד לשאר הגרפים

בספר: חיתוך עם ציר y הוא

$$27e^5 = 4,007.16$$

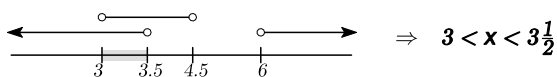


(3)

ג. הנגזרת משתנה ממינוס לפלוס ושוב למינוס. מתאים רק לגרף II.

ד. על-פי הטבלה וגרף הפונקציה:

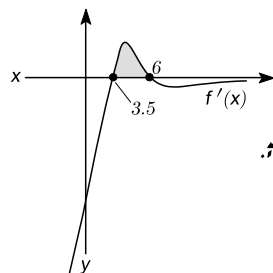
$$(f(x) < 0) \cap (f'(x) < 0) \Rightarrow (3 < x < 4\frac{1}{2}) \cap ((x < 3\frac{1}{2}) \cup (x > 6))$$



$$\Rightarrow 3 < x < 3\frac{1}{2}$$

$$S = \int_{3.5}^6 f'(x) dx = f(x) \Big|_{3.5}^6 = f(6) - f(3\frac{1}{2}) = 3.31 - (-4.48)$$

$$\Rightarrow S = 7.79 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



ה.

5. א. סימון (מקובל במתמטיקה): $(\ln x)^2 = \ln^2 x$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{4x}, \quad \ln x \Rightarrow (1) \quad x > 0, \quad (2) \quad 4x \Rightarrow x \neq 0$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x > 0$$

ב.

$$y = 0 \Rightarrow \ln^2 x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

ג.

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot 4x - 4 \ln^2 x}{(4x)^2} = \frac{8 \ln x - 4 \ln^2 x}{16x^2} = \frac{4 \ln x (2 - \ln x)}{16x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{4x^2} \stackrel{?}{=} 0$$

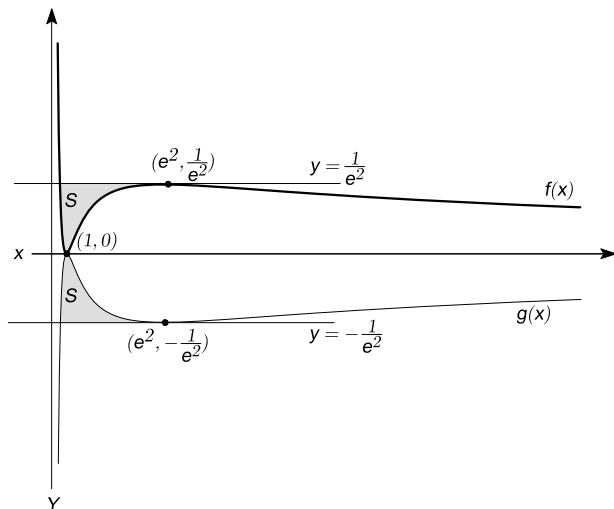
$$(1) \quad \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(2) \quad 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

x	0		1		e^2	
f'		$\frac{-+}{+} = -$	0	$\frac{++}{+} = +$	0	$\frac{+-}{+} = -$
f		\searrow	min	\nearrow	max	\searrow

$$f(e^2) = \frac{\ln^2 e^2}{4e^2} = \frac{2^2}{4e^2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \min(1, 0), \max(e^2, \frac{1}{e^2})$$

ד.



ה. (1)

$$\max(e^2, \frac{1}{e^2}) \Rightarrow y = \frac{1}{e^2}$$

(2) הפונקציה $g(x) = -f(x)$ היא שיקוף סימטרי של גרף הפונקציה $f(x)$,

כאשר ציר הסימטריה הוא ציר x.

לכן הישר המשיק הסימטרי הוא $y = -\frac{1}{e^2}$ וזהו גם ערכו של c המבוקש: $c = -\frac{1}{e^2}$

הנוסחאות הרשמי לארבע יחידות

אלגברה

נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ $S = \frac{a_1}{1 - q}$: סכום אינסופי	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$	סכום

חוקות: $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} , y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

היום אתה המבוגר ביותר שהיית והצעיר ביותר שתהיה.

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{,} \quad P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{- נוסחת בייס}$$

טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{(R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad \text{(}\gamma \text{ היא הזווית הכלואה בין } a \text{ ל-} b \text{)}$$

$$S = \frac{1}{2} a R^2 \quad \text{- אורך קשת של } \alpha \text{ רדיאנים: } l = aR, \quad \text{שטח גזרה של } \alpha \text{ רדיאנים}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{(}\alpha \text{ היא הזווית הכלואה בין } b \text{ ל-} c \text{)}$$

$$V = B \cdot h \quad \text{נפח: } \text{מנסרה ישרה וגליל: } \text{(B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)}$$

$$M = P \cdot h \quad \text{שטח מעטפת: } \text{(P - היקף הבסיס, h - גובה הגוף)}$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{נפח: } \text{פירמידה וחרוט: } \text{(B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)}$$

$$M = \pi R l \quad \text{שטח מעטפת: } \text{(R - רדיוס העיגול, l - הקו היוצר)}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נגזרת של מכפלת פונקציות}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של מנת פונקציות}$$

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x) \quad \text{נגזרת של פונקציה מורכבת: כאשר } u'(x) \text{ היא נגזרת}$$

של u לפי x (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

$$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad \text{- אינטגרלים}$$

$$\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c \quad \text{אם } F(x) \text{ היא פונקציה קדומה של } f(x) \text{ אז:}$$