481

בגרויות מתמטיקה - פתרונות מלאים - חלק שני

מספר מילים לפנֵי

ספר זה הוא השני משני ספרים המכילים שאלות ממבחני הבגרות במתמטיקה לשאלון 481 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. חלק זה מכיל את כל 58 המבחנים שנערכו לשאלון זה בין השנים 2009–2023, במתכונת המבחן הנוכחי. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לאותו מבחן.
בספר הראשון שאלות מהשנים 2004–2013, מחולקות לפי נושאים.

הביטוי '**ללא הגבלת הכלליות**' המופיע בספר אומר שאנו קובעים ערך מִספרי מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך). דוגמה: במקום לחשב זוויות משולש שאורכי צלעותיו $3a, 4a, 5a$ ניתן לקבוע ש־ $a = 1$ ולחשב את זוויות המשולש שצלעותיו הם: $3, 4, 5$.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'.
ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת ל**שריף אמארה** מכפר זָלָפָּה ול**שרון חיים** מפתח תקוה.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחָלַחְתִי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

אלי מיטב

בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 582-581-482-382

בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 582-581-482-481

<u>מבנה מבחן הבגרות לשאלון 481</u>

שאלון ד׳ (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה׳ (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שלוש שעות וחצי.

<u>פרק א</u> - אלגברה, גאומטריה אנליטית והסתברות.

בחירה: שתי שאלות מתוך שלוש שאלות.

שאלה 1: שאלה מילוליות

שאלה 2: גאומטריה אנליטית

שאלה 3: הסתברות.

<u>פרק ב</u> - גאומטריה וטריגונומטריה במישור.

בחירה: שאלה אחת מתוך שתיים:

שאלה 4: גיאומטריה.

שאלה 5: טריגונומטריה.

<u>פרק ג</u> - בחירה: שתי שאלות מתוך שלוש שאלות (שאלות 6-8).

חדו״א של פולינומים, שורש ריבועי ופונקציות רציונליות.

***נִקוֹמָחוֹס* (Nicomachus)** *היה מתמטיקאי מהעיר גֶרָש שבעבר הירדן. הוא פעל בסביבות שנת 100 לספירה. התעסק בעיקר בחשבון ובאלגברה. הנה משהו נחמד שהוא גילה: אם ניקח את המספרים הלא זוגיים באופן הבא: פעם ראשונה ניקח את 1, אח״כ את שני הבאים אחרי 1, אח״כ את שלושת הבאים אחריהם וכו׳ - אזי סכום כל סדרת מספרים כזאת הינה חזקה שלישית לפי הסדר, כפי שמתואר להלן:*

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3$$
$$43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 = 343 = 7^3$$
$$57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 = 512 = 8^3$$
$$73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 = 729 = 9^3$$
$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109 = 1000 = 10^3$$
$$\vdots$$

מבחן 1 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שתי שאלות מהשאלות 4-6 , שתי שאלות מהשאלות 7-9 .

פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות

1. נתון משולש ישר־זווית ABC $(\angle A = 90^\circ)$, שבו הצלע BC מקבילה לציר x .

משוואת הצלע AB היא $y = \frac{1}{3}x$. שיעור x של קודקוד B הוא 3 .

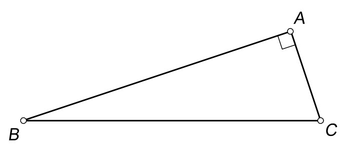
שיעור x של קדקוד C גדול ב־ 1 משיעור x של קדקוד A .

א. מצא את שיעורי הקדקודים של המשולש ABC .

ב. חשב את השטח של המשולש ABC .

ג. העבירו מעגל החוסם את המשולש ABC .

מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A .



2. בנו קופסה סגורה בצורת תיבה שבסיסה ריבוע. גובה התיבה גדול פי 1.4 מצלע הבסיס.

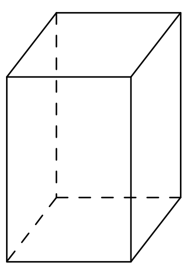
שטח הפנים של התיבה (השטח של שש פאות התיבה) הוא 1710 סמ"ר.

א. מצא את צלע הבסיס, ואת גובה התיבה.

ב. רוצים למלא את התיבה בקוביות, שאורך הצלע של כל אחת מהן

הוא $\frac{1}{5}$ מאורך צלע הבסיס של התיבה.

בכמה קוביות כאלה אפשר למלא את התיבה?



3. $\frac{3}{4}$ מהתלמידים בכיתה אוהבים שוקולד או גלידה (כולל תלמידים האוהבים שוקולד וגם גלידה).

9 תלמידים אינם אוהבים שוקולד וגם אינם אוהבים גלידה.

א. **(1)** בוחרים באקראי תלמיד אחד מהכיתה.

מהי ההסתברות שהוא אינו אוהב שוקולד וגם אינו אוהב גלידה ?

(2) מצא כמה תלמידים יש בכיתה.

ב. כל תלמיד בכיתה שאוהב שוקולד כתב על פתק: 'כן',

וכל תלמיד שאינו אוהב שוקולד כתב על פתק: 'לא'.

ערבבו את כל הפתקים, ובחרו מביניהם באקראי 5 פתקים עם החזרה.

נתון כי ההסתברות שעל 3 מהם כתוב 'כן' שווה להסתברות שעל 2 מהם כתוב: 'כן'.

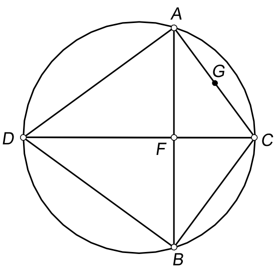
מצא כמה תלמידים בכיתה אוהבים שוקולד.

תשובות

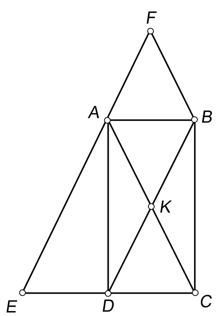
1. **א.** $A(12,4)$, $B(3,1)$, $C(13,1)$ **ב.** $S_{\triangle} = 15$ (יחידות ריבועיות) **ג.** $y = -\frac{4}{3}x + 20$

2. **א.** $x = 15_{cm}$, $h = 21_{cm}$ **ב.** 175 (קוביות) **3.** **א.** **(1)** $\frac{1}{4}$ **(2)** 36 (תלמידים) **ב.** 18 (תלמידים)

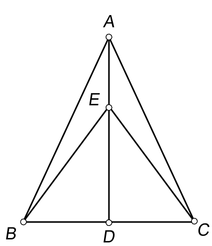
פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. A , B , C ו־ D הן נקודות על מעגל.
המיתרים AB ו־ CD נחתכים בנקודה F .
נתון: $\angle DAC = \angle DBC$.
א. הוכח כי DC הוא קוטר.
ב. נתון גם כי $\angle ACD = \angle BCD$. הוכח: $AB \perp CD$.
ג. נקודה G נמצאת על AC כך ש־ $GF = AG$. הוכח: $GF = GC$.



5. אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה K .
דרך הקדקודים A ו־ B העבירו ישרים המקבילים לאלכסוני המלבן.
הישרים המקבילים נפגשים בנקודה F .
המקביל דרך קדקוד A נפגש עם המשך הצלע DC בנקודה E .
א. הוכח כי $ED = DC$.
ב. הוכח כי המרובע $FBKA$ הוא מעוין.
ג. נתון: $AE = 12_{cm}$. חשב את היקף המעוין $FBKA$.



6. AD הוא גובה במשולש שווה־צלעות ABC .
E נקודה על AD . נתון: $\angle BEC = \beta$.
א. הבע באמצעות β את היחס בין שטח המשולש ABC לבין שטח המשולש EBC $(\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}})$.
ב. נתון: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3}$. חשב את β , והראה כי $ED = DC$.

בכל התנ"ך כולו, יש רק פסוק אחד, המכיל את כל אותיות הא"ב, כולל כל האותיות הסופיות (מנצפ"ך).
הפסוק הוא בצפניה (מתרי עשר הנביאים) בפרק ג' פסוק ח'.
הפסוק אינו מובא כאן מפאת קדושתו, והקורא מוזמן לעיין שם.
שני פסוקים בתורה המכילים את כל אותיות הא"ב (לא כולל מנצפ"ך)
הם בספר דברים ד ל"ד ובספר שמות: ט"ז ט"ז

תשובות

5. **ג.** 24_{cm}

6. **א.** $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3}\ tg\ \frac{\beta}{2}$ **ב.** $\beta = 90^\circ$

<u>פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש</u>

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, $a \neq 0$ פרמטר.

א. **(1)** מצא את שיעורי הנקודות שבהן נגזרת הפונקציה שווה ל־ 0 (הבע באמצעות a במידת הצורך).

(2) נתון כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $y = x + 4$.

מצא את ערך הפרמטר a .

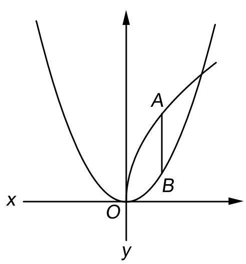
ב. הצב את ערך הפרמטר a שמצאת, וקבע את סוג נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

8. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ ו־ $g(x) = \sqrt{2x}$.

הנקודות A ו־ B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך ש־ AB מקביל לציר y ,

והנקודות נמצאות בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות.



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו־ B

שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ב. עבור האורך המקסימלי של הקטע AB ,

חשב את שטח המשולש ABO (O - ראשית הצירים).

9. שאלה זו עסקה בחדו"א של פונקציות טריגונומטריות. חומר זה הועבר לשאלון 482 (805) .

בהצלחה

תשובות

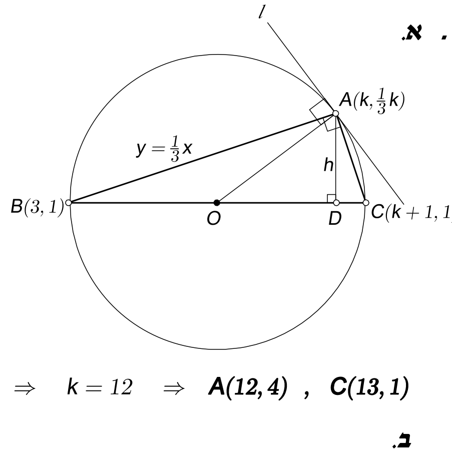
7. **א.** **(1)** $(2a, 4a)$, $(0,0)$ **(2)** $a = 2$ **ב.** min : $(4,8)$, max : $(0,0)$

ג. ↘: $(0 < x < 2) \cup (2 < x < 4)$, ↗: $(x < 0) \cup (x > 4)$

8. **א.** $B(2, \frac{1}{2})$, $A(2,2)$ **ב.** $S_{\triangle} = 1\frac{1}{2}$ (יחידות ריבועיות)

<u>פתרון מבחן 1</u>

1. א.



$x_B=3 \quad\Rightarrow\quad y_B=\frac{1}{3}\cdot 3=1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{B(3,1)}$

$BC \parallel \underset{\text{ציר } x}{(y=0)} \quad\Rightarrow\quad y_C=y_B=1$

$A(k,\frac{1}{3}k) \quad\Rightarrow\quad x_C=k+1$

$AB \perp AC \;,\; m_{AB}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad m_{AC}=-3$

$m_{AC}=\frac{\frac{1}{3}k-1}{k-(k+1)}=\frac{\frac{1}{3}k-1}{-1}=1-\frac{1}{3}k=-3 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}k=4 \quad\Rightarrow\quad k=12 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A(12,4)} \;,\; \mathbf{C(13,1)}$

ב.

$S_\triangle=\frac{BC\cdot h_a}{2}=\frac{(x_C-x_B)\cdot(y_A-y_D)}{2}=\frac{(13-3)\cdot(4-1)}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_\triangle=15}$ **(יחידות ריבועיות)**

ג. נסמן את הישר המשיק ב־ l .

הפתרון מסתמך על: מרכז המעגל החוסם משולש ישר־זווית הוא אמצע היתר.

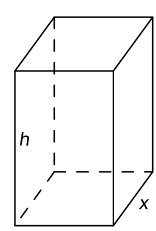
משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.

$O(\frac{3+13}{2},1) \quad\Rightarrow\quad O(8,1) \quad\Rightarrow\quad m_{OA}=\frac{4-1}{12-8}=\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad m_l=-\frac{4}{3}$

$A(12,4) \quad\Rightarrow\quad y-4=-\frac{4}{3}(x-12) \quad\Rightarrow\quad y-4=-\frac{4}{3}x+16 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=-\frac{4}{3}x+20}$

---

2. א. נסמן: x - אורך צלע הבסיס ($\Leftarrow$ גובה התיבה: $h=1.4x$) , S - שטח פני התיבה



$S=2x^2+4x\cdot 1.4x=1710 \quad\Rightarrow\quad 7.6x^2=1710 \quad\Rightarrow\quad x^2=225$

$\Rightarrow\quad \mathbf{x=15_{cm}} \quad\Rightarrow\quad h=1.4\cdot 15 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{h=21_{cm}}$

ב. אורך צלע הקוביה: $\frac{15}{5}=3_{cm}$. הבסיס מכיל שכבה של $5\times 5=25$ קוביות

ניתן לבנות $\frac{21}{3}=7$ שכבות כאלה לגובה. ובסה"כ: $\mathbf{7\times 25=175}$ **קוביות**

---

3. א. 1-2 נסמן: A - שיעור התלמידים שאוהבים שוקולד , B - שיעור התלמידים שאוהבים גלידה

x - מספר התלמידים בכיתה

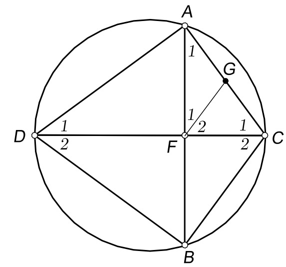
$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{4}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}x=9 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=36}$ **(תלמידים)**

ב.

$P(yes)=\frac{N(A)}{36}=k \;,\; P_5^3=P_5^2 \quad\Rightarrow\quad \binom{5}{3}\cdot k^3\cdot(1-k)^2=\binom{5}{2}\cdot k^2\cdot(1-k)^3$

$\Rightarrow\quad k=1-k \quad\Rightarrow\quad 2k=1 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{2}=\frac{N(A)}{36} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{N(A)=18}$ **(תלמידים)**

4. א.



$(1)\ \angle A = \angle B\ ,\ (2)\ \angle A + \angle B = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle A = 90^\circ$

$\angle A = 90^\circ \quad \Rightarrow^{(3)} \quad$ **$DC = 2R$** $(\surd)$

ב.

$\underline{\triangle ACD \cong \triangle BCD :}\ (1)\ \angle C_1 = \angle C_2\ ,\ (4)\ DC = DC\ ,\ (1)\ \angle A = \angle B$

$\Rightarrow^{(5)}\ \angle D_1 = \angle D_2 \quad \Rightarrow^{(6)}\ \triangle ACD \cong \triangle BCD$

$\underline{\triangle ACB :}\ (7)\ CA = CB \quad \Rightarrow^{(8)}$ **$CF \perp AB$** $(\surd)$

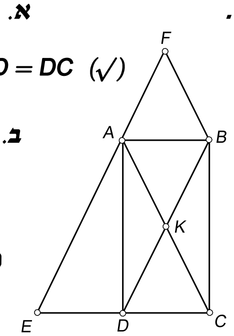
ג.

$(9)\ \angle A_1 = \angle F_1\ ,\ (10)\ \angle F_2 = 90^\circ - \angle F_1 = 90^\circ - \angle A_1$

$(5)\ \angle C_1 = 90^\circ - \angle A_1 \quad \Rightarrow \quad \angle C_1 = \angle F_2 \quad \Rightarrow^{(11)}$ **$GF = GC$** $(\surd)$

---

5. א.



$(12)\ AK = KC\ ,\ (1)\ DK \parallel AE \quad \Rightarrow$ DK קטע אמצעים ב־ $\triangle ACE$ $\Rightarrow$ **$ED = DC$** $(\surd)$

ב.

$FBKA$ מקבילית , $(12)\ AK = KB \quad \Rightarrow^{(13)}$ **$FBKA$ מעוין** $(\surd)$

ג.

$AE = 12_{cm} \quad \Rightarrow^{(14)}\ BD = 12 \quad \Rightarrow^{(12)}\ KB = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow \quad BK + KA + AF + FB = 4 \cdot 6 = $ **24_{cm}**

- -

(1) נתון (2) סכום זוויות נגדיות של מרובע החסום במעגל הוא 180°

(3) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר (4) צלע משותפת

(5) השלמה ל־ 180° במשולש (6) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית (7) צמב״ח

(8) חוצה זווית הראש במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה לבסיס

(9) זוויות הבסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (10) השלמה ל־ 90°

(11) משולש ששתי זוויות שלו שוות זו לזו הוא משולש שווה־שוקיים

(12) אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה

(13) מקבילית ששתי צלעות סמוכות שלה שוות זו לזו - היא מעוין

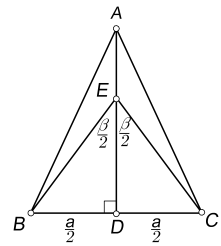
(14) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

6. א. נסמן את אורך BC ב־ a : $BC = a$.

גובה במשולש שווה־צלעות הוא גם אנך אמצעי, וגם חוצה־זווית, לכן: $BD = DC = \frac{a}{2}$.

ED הוא גם גובה וגם תיכון במשולש EBC $\Leftarrow$ $\triangle EBC$ שווה־שוקיים

$$\Rightarrow \quad \angle BED = \angle CED = \frac{\beta}{2}$$



$$\underline{\triangle EDB:} \ \angle BED = \frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad tg\ \frac{\beta}{2} = \frac{DB}{ED} = \frac{\frac{a}{2}}{ED} \quad \Rightarrow \quad ED = \frac{\frac{a}{2}}{tg\ \frac{\beta}{2}} = \frac{a}{2\ tg\ \frac{\beta}{2}}$$

$$\underline{\triangle ADB:} \ tg\ 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{\frac{a}{2}} = \frac{2\ AD}{a} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{BC \cdot AD}{2} : \frac{BC \cdot ED}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \cdot \frac{2}{BC \cdot ED} = \frac{AD}{ED}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2\ tg\ \frac{\beta}{2}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\ tg\ \frac{\beta}{2}}{\cancel{a}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3}\ tg\ \frac{\beta}{2}}$$

ב.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3}\ tg\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad tg\ \frac{\beta}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{2} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 90^\circ}$$

$$\beta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \underline{\triangle EDC:} \ \frac{\beta}{2} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle ECD = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{ED = DC} \ (\checkmark)$$

---

7. א. (1)

$$f(x) = \frac{x^2}{x-a} \ , \quad f'(x) = \frac{2x(x-a) - 1 \cdot x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2} = \frac{x(x-2a)}{(x-a)^2} \overset{?}{=} 0$$

$$x(x-2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ , \ x_2 = 2a$$

$$f(0) = \frac{0}{0-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(0,0)}$$

$$f(2a) = \frac{4a^2}{2a-a} = \frac{4a^2}{a} = 4a \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(2a, 4a)}$$

(2)

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 + 4 = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2a$$

$$\Rightarrow \quad 2a + 4 = 4a \quad \Rightarrow \quad 2a = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

ב.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-2}} \ , \quad f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \ , \quad (x^2 - 4x)' = \underline{2x - 4}$$

$$\underline{2 \cdot 0 - 4} < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{max: \ (0,0)}$$

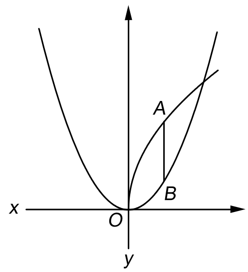
$$\underline{2 \cdot 4 - 4} > 0 \quad \Rightarrow \quad f''(4) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{min: \ (4,8)}$$

ג.

$$x_{max} = 0 \ , \ x \neq 2 \ , \ x_{min} = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\nearrow:} \ \boldsymbol{(x < 0) \cup (x > 4)}$$

$$\underline{\searrow:} \ \boldsymbol{(0 < x < 2) \cup (2 < x < 4)}$$

8. א.



$$k(x) = AB = y_A - y_B = \sqrt{2x} - \frac{1}{8}x^2$$

$$k'(x) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} - \frac{1}{4}x \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{2x} \overset{*}{=} 4 \quad /(\ )^2$$

$$2x^3 = 16 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

בדיקה: $(*) \quad 2\cdot\sqrt{2\cdot 2} = 2\cdot 2 = 4 \quad (\surd)$

$$k''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}$$

$$k''(2) = -\frac{2^{-1.5}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad max \quad (\surd)$$

$$y(A) = \sqrt{2\cdot 2} = 2 \quad , \quad y(B) = \frac{1}{8}\cdot 2^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A(2,2)} \quad , \quad \mathbf{B(2,\tfrac{1}{2})}$$

ב.

$$h_O = x_B - x_O = 2 - 0 = 2 \quad , \quad AB = y_A - y_B = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S_\triangle = \frac{\frac{3}{2}\cdot 2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_\triangle = 1\tfrac{1}{2}}$$ **(יחידות ריבועיות)**

קָרל פְרִידְרִיך גָאוּס

קָרל פְרִידְרִיך גָאוּס 1777–1855. מתמטיקאי ופיזיקאי גרמני. אחד משלושת גדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, לצידם של ניוטון וארכימדס. עסק באלגברה, תורת המספרים, גיאומטריה דיפרנציאלית, תורת הכבידה, חשמל ומגנטיות, אסטרונומיה ועוד. בהיותו ילד, משועמם משיעור בביה"ס, הטיל עליו המורה לחבר את כל המספרים מ־1 עד 100. המורה נדהם כשגאוס מסר לו את התשובה תוך שניות. גאוס חילק את כל המספרים שבין 1 ל־100 כך: $1+100,\ 2+99,\ 3+98\ .\ .\ .\ 50+51$. קיבלנו 50 זוגות שסכום כל אחד מהם הוא 101 ולכן הסכום הוא: $101\times 50 = 5050$. השגו הגדול באלגברה היה הוכחת המשפט היסודי של האלגברה במספר אופנים. מָצָא את כל ערכי n עבורם ניתן לבנות מצולע משוכלל בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. היה לו מנהג להשהות את תגליותיו עד כדי עשרות שנים, גם כדי להוציא מתחת ידו יצירה מושלמת וגם כדי להמנע מלהכנס לוויכוח עם מי שחסר את ההבנה הדרושה לקליטתם. הגיע למסקנה שניתן לבנות גם גאומטריה 'לא אוקלידית' (שבה ישרים מקבילים נפגשים באינסוף) אולם לא פרסם זאת ודבריו נשארו ביומניו.

מבחן 56 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: חמש שאלות מהשאלות 1-8.

פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות

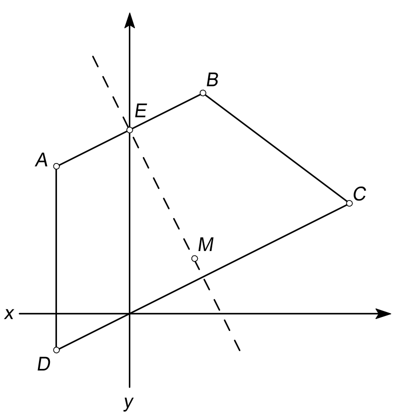
1. רותי יצאה מביתה בשעה 7:00 והתחילה ללכת במהירות קבועה אל הבית של דודתה.
אם היתה רותי ממשיכה ללכת באותה המהירות,
היא היתה מגיעה לבית של דודתה בדיוק בשעה 9:00.
אבל, אחרי שעברה רבע מן הדרך, היא עצרה לנוח במשך חצי שעה.
אחר כך היא המשיכה ללכת במהירות קבועה הגדולה ממהירותה ההתחלתית ב־ 0.6 קמ"ש.
רותי הגיעה לבית של דודתה בשעה 9:21.

א. מה היתה המהירות שבה התחילה רותי ללכת כשיצאה מביתה?

ב. מהו המרחק בין הבית של רותי לבין הבית של דודתה?

ג. באיזו שעה הגיעה רותי לאמצע הדרך?

2. המרובע ABCD הוא טרפז שווה־שוקים, $AD = BC$, $AB \parallel DC$.
הנקודה E היא אמצע הצלע AB. $B(2,6)$.
משוואת האנך לצלע AB העובר
דרך הנקודה E היא $y = -2x + 5$.



א. **(1)** מצא את משוואת AB.

(2) מצא את שיעורי הקדקוד A.

נתון: $C(6,3)$.

השוק AD מקבילה לציר y.

ב. **(1)** מצא את אורך השוק BC.

(2) מצא את שיעורי הקדקוד D.

הנקודה M נמצאת על האנך הנתון ומתקיים: $AM = DM$.

ג. מצא את שיעורי הנקודה M.

ד. מצא את שטח המשולש ADM.

תשובות

1. **א.** $5.4_{km/h}$ **ב.** 10.8_{km} **ג.** 8:27

2. **א.** **(1)** $y = \frac{1}{2}x + 5$ **(2)** $A(-2,4)$ **ב.** **(1)** $BC = 5$ **(2)** $D(-2,-1)$

ג. $M(1\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$ **ד.** $S = 9\frac{3}{8}$ (יחידות ריבועיות)

3. בקלמר של דנה יש 25 עפרונות זהים בגודלם בשלושה צבעים:

15 עפרונות כחולים, 4 עפרונות אדומים ו־ 6 עפרונות צהובים.

דנה מוציאה באקראי עיפרון מהקלמר.

אם העיפרון הוא כחול או אדום, היא מחזירה את העיפרון לקלמר.

אם העיפרון הוא צהוב, היא משאירה אותו מחוץ לקלמר.

לאחר מכן דנה מוציאה באקראי עיפרון נוסף מן הקלמר.

א. מהי ההסתברות שדנה תוציא שני עפרונות צהובים?

ב. **(1)** מהי ההסתברות שדנה תוציא שני עפרונות באותו הצבע ?

(2) ידוע ששני העפרונות שהוציאה דנה הם באותו צבע.

מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני עפרונות אדומים או שני עפרונות צהובים?

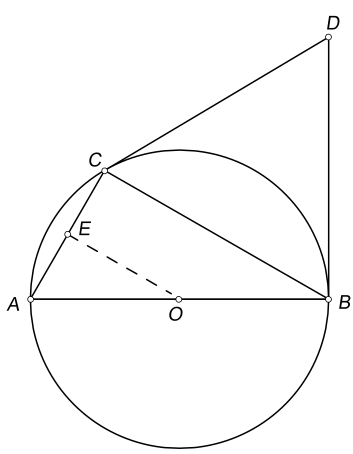
דנה החזירה את כל העפרונות לקלמר,

ונתנה לאחיה מן הקלמר x עפרונות כחולים, 2 עפרונות אדומים ו־ 3 עפרונות צהובים.

לאחר מכן היא הוציאה באקראי שני עפרונות מן הקלמר ללא החזרה.

נתון: ההסתברות שדנה הוציאה עיפרון צהוב ולאחריו עיפרון אדום היא $\frac{1}{40}$.

ג. מצא את x.



פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC.

א. **(1)** הוכח: $OE \perp AC$.

(2) הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle AOE$.

ב. פי כמה גדול שטח המרובע $BCEO$ משטח המשולש AOE ? נמק.

נתון: AC שווה לרדיוס המעגל. המשיקים למעגל בנקודות B ו־ C נפגשים בנקודה D.

ג. הוכח: משולש BDC הוא שווה־צלעות.

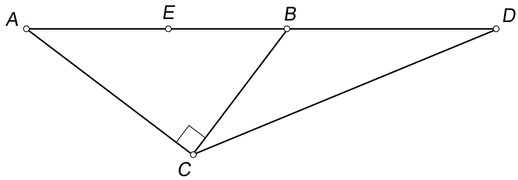
נתון: רדיוס המעגל הוא 10. **ד.** מצא את שטח המשולש OCD.

תשובות

3. **א.** $P = \frac{1}{20}$ **ב.** **(1)** $P = \frac{1089}{2500} = 0.4356$ **(2)** $P = \frac{21}{121} = 0.1736$ **ג.** $x = 4$

4. **ב.** פי שלושה **ד.** $S = 50\sqrt{3}$ (יחידות ריבועיות)

5. המשולש ABC הוא ישר־זווית, $\angle ACB = 90^{\circ}$.



הנקודה D נמצאת על המשך הצלע AB.

נתון: $BC = 0.75 \cdot AC$.

א. מצא את גודל הזווית CBD.

נתון: $AB = 20$, $BD = 16$.

ב. מצא את אורך DC.

הנקודה E נמצאת על הקטע AB ומתקיים: $DC = DE$.

ג. מצא את שטח המשולש EDC.

ד. מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש EBC.

<u>פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש</u>

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9-4x^2}{1-x^2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

(5) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g'(x) = f(x)$.

לפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן. נמק.

אפלטון: to be is to do . **סוקרטס:** to do is to be . **פרנק סינטרה:** do be do be do .

תשובות

5. **א.** 126.87° **ב.** $DC = 25.11$ (יחידות אורך)

ג. $S_{\triangle EDC} = 120.54$ (יחידות ריבועיות) **ד.** $R = 6.12$ (יחידות אורך)

6. **א.** **(1)** $(x < -1) \cup (-1 < x < 1) \cup (x > 1)$ **(2)** $x = \pm 1$, $y = 4$

(3) $(\pm 1\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 9)$ **(4)** min $(0, 9)$

(5) $\nearrow$: $(0 < x < 1) \cup (x > 1)$, $\searrow$: $(x < -1) \cup (-1 < x < 0)$

ג. $x_{min} = 1\frac{1}{2}$, $x_{max} = -1\frac{1}{2}$

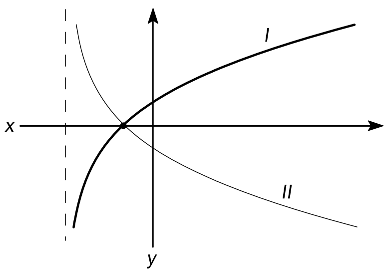
7. נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)\cdot\sqrt{2x+6}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי <u>כל</u> נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



אחד הגרפים בציור מתאר

את גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$,

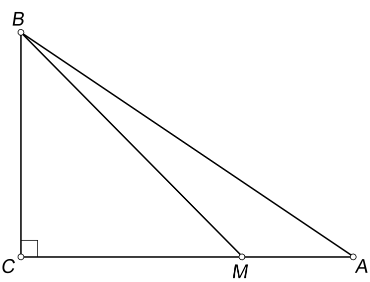
והאחר מתאר את

גרף הפונקציה $g(x) = -f'(x)$.

ה. קבע איזה גרף מתאר את פונקצית הנגזרת $f'(x)$. נמק.

ו. חשב את השטח המוגבל על־ידי גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$,

על־ידי הישר $x = 5$ ועל־ידי ציר x.



8. המשולש ABC הוא משולש ישר־זווית, $\angle ACB = 90°$.

שטח המשולש ABC הוא 162.

M היא נקודה על הצלע AC ,

כך שמתקיים: $MC = 2\,MA$.

נסמן את אורך הקטע MA ב־ x.

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.

ב. **(1)** מצא את x שעבורו סכום ריבועי מרחקי הנקודה M

משלושת קדקודי המשולש ($MA^2 + MB^2 + MC^2$) הוא מינימלי.

(2) האם יתכן שהסכום $MA^2 + MB^2 + MC^2$ הוא 675 ? נמק.

בהצלחה

תשובות

7. **א.** $x \geq -3$ **ב.** $(0, -3\sqrt{6})$, $(\pm3, 0)$ **ג.** $max_{ep.}\ (-3, 0)$, $min\ (-1, -8)$

ה. I **ו.** $S = 16$ (יחידות ריבועיות)

8. **א.** $BC = \frac{108}{x}$ **ב.** **(1)** $x_{min} = 6$ **(2)** כן

פתרון מבחן 56

1. א. AB - כל הדרך

C - נקודת המנוחה

	V	T	S
$A \to B$	x	2	$2x$
$A \to C$	x	$\frac{x}{2} : x = \frac{1}{2}$	$\frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$
C	0	$\frac{1}{2}$	0
$C \to B$	$x + 0.6$	$2\frac{21}{60} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1\frac{7}{20}$	$(x+0.6)\cdot 1\frac{7}{20} = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x$

$(x+0.6)\cdot 1\frac{7}{20} = \frac{3}{2}x \quad /\cdot 20 \quad \Rightarrow \quad (x+0.6)\cdot 27 = 30x \quad \Rightarrow \quad 27x + 16.2 = 30x$

$\Rightarrow \quad 3x = 16.2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 5.4_{km/h}}$

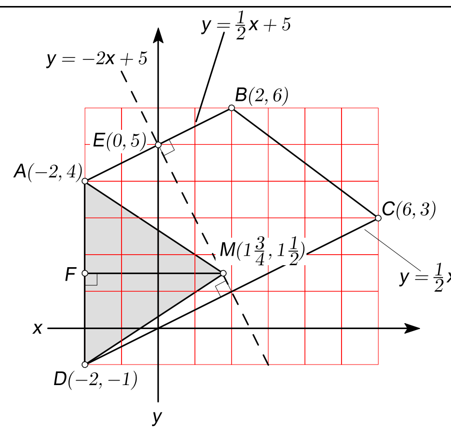
ב. $AB = 2x = 2\cdot 5.4 = \mathbf{10.8_{km}}$

ג. נבדוק את הזמן הנדרש לחצי הדרך <u>הקרובה</u> לבית הדודה: $\frac{10.8}{2} : (5.4 + 0.6) = 0.9_{hour}$

מכיון שהיא הגיעה לבית דודתה בשעה $9{:}21$, היא הגיעה למחצית הדרך בשעה:

$0.9_{hour} = 0.9\cdot 60_{minutes} = 54_{minutes} \quad \Rightarrow \quad 9{:}21 - 0{:}54 = \mathbf{8{:}27}$

.2



א. (1)

$m_{EM} = -2 \,,\ AB \perp ME \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = \frac{1}{2}$

$E(0,5) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = \frac{1}{2}\cdot(x - 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{1}{2}x + 5}$

(2)

$\frac{x_A + x_B}{2} = x_E \quad \Rightarrow \quad \frac{x_A + 2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = -2$

$\frac{y_A + y_B}{2} = y_E \quad \Rightarrow \quad \frac{y_A + 6}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad y_A = 4$

$\Rightarrow \quad \mathbf{A(-2,4)}$

ב. (1)

<u>CD :</u> $m = m_{AB} = \frac{1}{2} \quad , \quad C(6,3) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = \frac{1}{2}(x-6) \quad / +3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x$

$x_D = x_A = -2 \quad \Rightarrow \quad y_D = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1 \quad \Rightarrow \quad D(-2,-1)$

$\Rightarrow \quad AD = y_A - y_D = 4 - (-1) \quad \Rightarrow \quad AD = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BC = 5}$

(2) מיידית מהסעיף הקודם: $\mathbf{D(-2,-1)}$

ג. M נמצאת על האנך האמצעי FM לקטע AD.

$y_F = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} = y_M \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = -2x + 5 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(1\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})}$

ד. $FM = x_M - x_F = 1\frac{3}{4} - (-2) = 3\frac{3}{4} \quad , \quad AD = 5 \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle ADM} = \frac{3\frac{3}{4}\cdot 5}{2} = \mathbf{9\frac{3}{8}}$ **(יחידות ריבועיות)**

3. א. B - כחול , R - אדום , Y - צהוב , 1 - הוצאה ראשונה , 2 - הוצאה שניה

$B = 15\ ,\ R = 4\ ,\ Y = 6\ ,\ S = 25$

$P = P(Y_1 \cap Y_2) = \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P = \frac{1}{20}}$

ב. (1)

$P = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + \frac{1}{20} = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} + \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P = \frac{1089}{2500} = 0.4356}$

(2)

$P = P(\ ((R_1 \cap R_2) \cup (Y_1 \cap Y_2))\ /\ (\text{same color})\ )$

$= \frac{P\ (\ ((R_1 \cap R_2) \cup (Y_1 \cap Y_2)) \cap (\text{same color})\ )}{P(\text{same color})}$

$= \frac{P((R_1 \cap R_2) \cup (Y_1 \cap Y_2))}{0.4356} = \frac{\frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} + \frac{1}{20}}{0.4356} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P = \frac{21}{121} = 0.1736}$

ג.

$B = 15 - x\ \ ,\ \ R = 4 - 2 = 2\ \ ,\ \ Y = 6 - 3 = 3\ \ ,\ \ S = 15 - x + 2 + 3 = 20 - x$

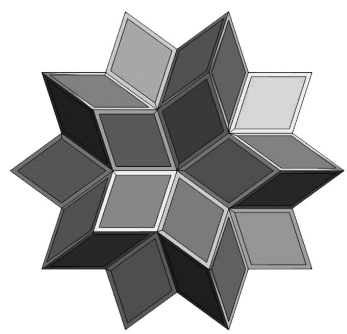
$P = P(Y_1 \cap R_2) = \frac{3}{20-x} \cdot \frac{2}{19-x} = \frac{1}{40} \quad / \cdot 40(20-x)(19-x)$

$240 = (20-x)(19-x) \quad \Rightarrow \quad 240 = 380 - 20x - 19x + x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 39x + 140 = 0$

$x_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 560}}{2} = \frac{39 \pm 31}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 35 > 15 \quad \Rightarrow \quad \times$

$x_2 = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$



לפניך ריבוע קסם שסכומו 72:

27	20	25
22 .	24	26
23	28	21

את ריבוע הקסם הזה ניתן להפוך לריבוע קסם של מכפלות:

128	1	32
4	16	64
8	256	2

מכפלת כל שורה, עמודה או אלכסון היא $4,096$

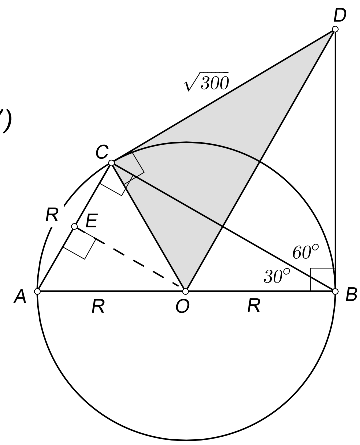
הרעיון כאן הוא זה:

2^7	2^0	2^5
2^2	2^4	2^6
2^3	2^8	2^1

– הפעל את חוקי החזקות על בסיסים שווים.

.4

א. (1)



$\angle ACB \overset{(1)}{=} 90^\circ \quad , \quad AE \overset{(2)}{=} EC \quad , \quad AO \overset{(2)}{=} OB = R$

$\frac{AE}{EC} = \frac{AO}{OB} \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad OE \parallel BC$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad \angle AEO = \angle ACB = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{OE \perp AC} \ (\checkmark)$

(2)

$\frac{AE}{EC} = \frac{AO}{OB} \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{\triangle ABC \sim \triangle AOE} \ (\checkmark)$

ב.

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOE}} \overset{(6)}{=} (\frac{AB}{AO})^2 = (\frac{2R}{R})^2 = 2^2 = 4$

$\Rightarrow \quad \frac{S_{\triangle AOE} + S_{BCEO}}{S_{\triangle AOE}} = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{S_{BCEO}}{S_{\triangle AOE}} = 4$

$\Rightarrow \quad \mathbf{S_{BCEO} : S_{\triangle AOE} = 3}$

ג.

$\frac{AC}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad \angle ABC = 30^\circ \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \angle DBC = 60^\circ$

$DB \overset{(9)}{=} DC \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad \angle DCB = \angle DBC = 60^\circ \quad \overset{(11)}{\Rightarrow} \quad \angle D = 60^\circ$

$\Rightarrow \quad \underline{\triangle DBC:} \ \angle D = \angle B = \angle C = 60^\circ \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{BC = CD = DB} \ (\checkmark)$

ד.

$\underline{\triangle ACB:} \ BC \overset{(12)}{=} \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = CD \quad , \quad OC \overset{(13)}{\perp} CD$

$S_{\triangle OCD} = \frac{OC \cdot CD}{2} = \frac{10 \cdot \sqrt{300}}{2} = 5\sqrt{100 \cdot 3} = 5 \cdot 10\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle OCD} = 50\sqrt{3}}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

(1) זווית היקפית הנשענת על קוטר (2) נתון (3) משפט הפוך לתאלס

(4) זוויות מתאימות בישרים מקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי (5) תאלס

(6) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

(7) גודל זווית מול ניצב במשולש ישר־זווית ששווה למחצית היתר הוא 30°

(8) השלמה ל־ 90°, הזווית בין משיק לרדיוס בנקודת ההשקה

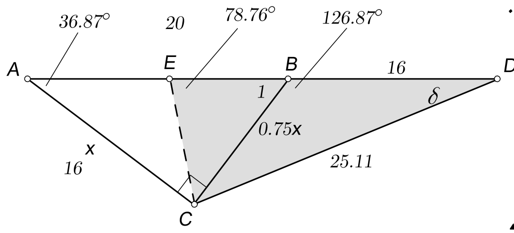
(9) שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת שווים זה לזה

(10) מול צלעות שוות במשולש מונחות זוויות שוות, ולהיפך

(11) השלמה ל־ 180° במשולש

(12) פיתגורס (13) משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה

5. א.



$\underline{\triangle ACB:}$ $AC \overset{(1)}{=} x \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad BC = 0.75x$

$tg\angle B_1 = \frac{x}{0.75x} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad \angle B_1 = 53.13^\circ$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{\angle CBD = 126.87^\circ}$

ב.

$\angle A \overset{(4)}{=} 90^\circ - \angle B_1 = 36.87^\circ$

$\underline{\triangle ACB:}$ $x^2 + (0.75x)^2 \overset{(5)}{=} 20^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{16}x^2 = 400 \quad / \cdot \frac{16}{25}$

$\Rightarrow \quad x^2 = 256 \quad \Rightarrow \quad x = 16$

$\underline{\triangle ACD:}$ $DC^2 \overset{(6)}{=} 16^2 + 36^2 - 2 \cdot 16 \cdot 36 \cdot \cos 36.87 = 630.4 \quad / \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{DC = 25.11}$ **(יחידות אורך)**

ג.

$BC = 0.75x = 0.75 \cdot 16 = 12 \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad \underline{\triangle BCD:} \quad \frac{25.11}{\sin 126.87^\circ} = \frac{12}{\sin \delta}$

$\Rightarrow \quad \sin \delta = \frac{12 \sin 126.87^\circ}{25.11} = 0.3823 \quad \Rightarrow \quad \delta = 22.48^\circ$

$S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot ED \cdot \sin 22.48^\circ = \frac{25.11^2 \sin 22.48^\circ}{2}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{\triangle EDC} = 120.54}$ **(יחידות ריבועיות)**

ד.

$\underline{\triangle DCE:}$ $\angle C \overset{(8)}{=} \angle E \overset{(4)}{=} \frac{180^\circ - 22.48^\circ}{2} = 78.76^\circ$

$\underline{\triangle EBC:}$ $\frac{BC}{\sin 78.76^\circ} = \frac{12}{\sin 78.76^\circ} \overset{(7)}{=} 2R \quad / : 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R = 6.12}$ **(יחידות אורך)**

---

(1) סימון (2) נתון (3) השלמה ל- 180° של זווית שטוחה (4) השלמה ל- 180° במשולש

(5) פיתגורס (6) משפט הקוסינוסים (7) משפט הסינוסים

(8) מול צלעות שוות במשולש מונחות זוויות שוות

תשובה של חיים ויצמן

חיים ויצמן (1874–1952), איש התנועה הציונית ונשיאה הראשון של מדינת ישראל.

מספר שנים לפני הצהרת בלפור שאל אותו חבר בית הלורדים האנגלי:

מדוע אתם היהודים מתעקשים על פלשתינה, כאשר ישנן כל־כך הרבה מדינות לא־מפותחות בהן אתם יכולים להתיישב בנוחות רבה יותר?

ענה לו ויצמן: "זה כמו שאני אשאל אותך מדוע נסעת בסוף השבוע שלושים קילומטר כדי לבקר את אמא שלך, כשיש כל כך הרבה זקנות שגרות ממש ברחוב שלך" . . .

6. א. (1)

$$f(x)=\frac{9-4x^2}{1-x^2} \quad , \quad 1-x^2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\neq 1 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{(x<-1)\cup(-1<x<1)\cup(x>1)}$$

(2)

$$\lim_{x\to\pm 1} f(x)=\frac{\to 5}{\to 0}=\infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=\pm 1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(\frac{9}{x^2}-4)}{\cancel{x^2}(\frac{1}{x^2}-1)}=\frac{0-4}{0-1}=4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=4}$$

(3)

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad 9-4x^2=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\pm\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(\pm 1\tfrac{1}{2},0)}$$

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{9}{1}=9 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(0,9)}$$

(4)

$$f'(x)=\frac{-8x(1-x^2)-(-2x)(9-4x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{-8x+8x^3+18x-8x^3}{(1-x^2)^2}=\boxed{\frac{10x}{(1-x^2)^2}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

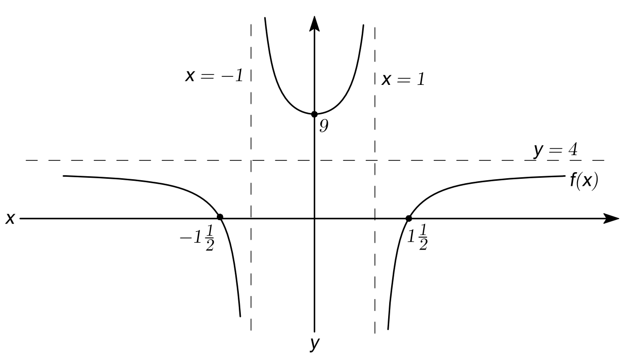
x		-1		0		1	
f'	$\frac{-}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{+}{+}=+$
f	↘	asym.	↘	min	↗	asym.	↗

$\Rightarrow$ **min** $\boldsymbol{(0,9)}$

(5)

↘: $\boldsymbol{(x<-1)\cup(-1<x<0)}$, ↗: $\boldsymbol{(0<x<1)\cup(x>1)}$

ב.



ג. ראה ציור.

x		-1.5		-1		1		1.5	
$g'=f$	$+$	0	$-$	asym.	$+$	asym.	$-$	0	$+$
g	↗	max	↘	$\emptyset$	↗	$\emptyset$	↘	min	↗

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x_{max}=-1\tfrac{1}{2} \quad , \quad x_{min}=1\tfrac{1}{2}}$$

7. א.

$f(x)=(x-3)\cdot\sqrt{2x+6}\quad,\quad 2x+6\ge 0 \;\Rightarrow\; 2x\ge -6 \;\Rightarrow\; \mathbf{x\ge -3}$

ב.

$x=0 \;\Rightarrow\; y=(-3)\cdot\sqrt{6}=-3\sqrt{6} \;\Rightarrow\; \mathbf{(0,-3\sqrt{6})}$

$y=0 \;\Rightarrow\; (1)\;\; x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3 \;\Rightarrow\; \mathbf{(3,0)}$

$(2)\;\; 2x+6=0 \;\Rightarrow\; x=-3 \;\Rightarrow\; \mathbf{(-3,0)}$

ג.

$f'(x)=1\cdot\sqrt{2x+6}+(x-3)\cdot\frac{1\,\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+6}}=\frac{2x+6+x-3}{\sqrt{2x+6}}=\boxed{\frac{3x+3}{\sqrt{2x+6}}}\overset{?}{=}0$

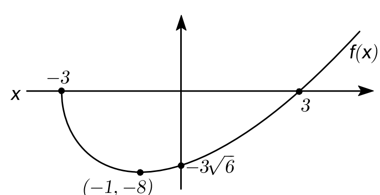
$\Rightarrow\; 3x+3=0 \;\Rightarrow\; x=-1$

x	-3		-1	
f'		$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$
f	$max_{ep.}$	↘	min	↗

$f(-1)=(-4)\cdot\sqrt{4}=(-4)\cdot 2=-8$

$\Rightarrow\; \mathbf{max_{ep.}(-3,0)\;,\; min\;(-1,-8)}$

ד.



ה. הנגזרת משתנה ממינוס לפלוס. מתאים רק לגרף **I**.

ו.

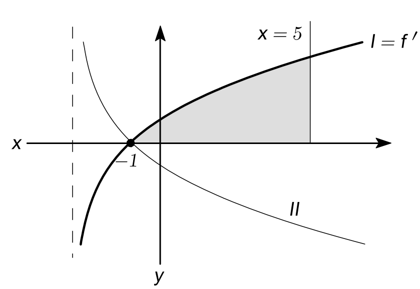
$S=\int_{-1}^{5} f'(x)\,dx=f(x)\Big|_{-1}^{5}$

$=f(5)-f(-1)$

$=2\cdot\sqrt{16}-(-8)$

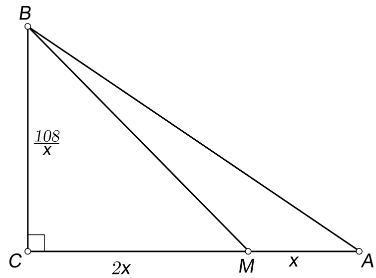
$=2\cdot 4+8$

$\Rightarrow\; \mathbf{S=16}$ **(יחידות ריבועיות)**



אינו מפסיקים לשחק כי אנחנו מתבגרים
אנחנו מתבגרים כי אנחנו מפסיקים לשחק

8. א.



$$S_{\triangle BCA} = \frac{BC \cdot 3x}{2} = 162 \quad / \cdot \frac{2}{3x}$$

$$\Rightarrow \quad BC = 162 \cdot \frac{2}{3x} = \mathbf{\frac{108}{x}}$$

ב. (1)

$\underline{\triangle BCM:}$ $BM = \sqrt{(\frac{108}{x})^2 + (2x)^2}$

$$= \sqrt{\frac{11{,}664}{x^2} + 4x^2} \quad \text{פיתגורס}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = f(x) = x^2 + (\frac{11{,}664}{x^2} + 4x^2) + 4x^2$$

$$f(x) = 9x^2 + \frac{11{,}664}{x^2}$$

$$f'(x) = 18x - \frac{11{,}664}{x^4} \cdot 2x = \boxed{18x - \frac{23{,}328}{x^3}} \overset{?}{} \; 0$$

$$\Rightarrow \quad 18x = \frac{23{,}328}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1,296 = 6^4 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

x	0		6	
f′		−	0	+
f		↘	min	↗

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{min} = 6}$

(2)

$$\min f(x) = f(6) = 9 \cdot 36 + \frac{11{,}664}{36} = 648 < 675 \quad \Rightarrow$$ <u>**כן**</u>

רק הוכחה היא הוכחה

עד כמה אין לסמוך על דוגמאות כדי להסיק מסקנות, ואפילו הן רבות מאוד, ניתן ללמוד מהתופעה שנתאר כעת. פרט ל־ 2 , כל המספרים הראשוניים הינם פרדיים (לא־זוגיים, או 'פרטיים'). ואלה נחלקים לשתי קבוצות: המספרים שגדולים ב־1 מכפולה של 4: $4n+1$ והמספרים שקטנים ב־1 מכפולה של 4 : $4n-1$.
בבדיקה של המספרים הראשונים, נראה שיש יותר מספרים ראשוניים בקבוצה של 'קטנים ב־1 ' מאשר בקבוצה של 'גדולים ב־1 '. כך נמשכת התופעה עד מיליארד. ואולם – האבחנה הזאת אינה נכונה!
אנשי תורת המספרים הראו בשיטות עקיפות כי כאשר המספרים הראשוניים נעשים גדולים דיָם, הרי שיש יותר מספרים ראשוניים בקבוצה של 'גדולים ב־1' מאשר בקבוצה האחרת.

ההוכחה לעובדה זו פעלה רק כאשר המספרים היו גדולים מ־ $10^{10^{10^{10^{46}}}}$. זהו מספר בלתי נתפס. לו כל החומר ביקום היה הופך לנייר והיינו רושמים על כל אלקטרון אפס אחד בלבד – לא היינו מכסים אפילו חלק קטן מהאפסים של מספר זה ! ! !

סימנים מתמטיים המופיעים בספר

$\cup$ - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x < 2$ או $x > 9$ ייכתב כך: $(x < 2) \cup (x > 9)$

$\cap$ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x < 8$ וגם $x > 1$ הוא התחום: $1 < x < 8$.
נרשום זאת כך: $1 < x < 8 \quad \Rightarrow \quad (x > 1) \cap (x < 8)$.

$(\surd)$ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

$\in$ - שייכות. דוגמה: $x \in [1, 9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1, 9]$ או: $1 \le x \le 9$
דוגמה: $(1, 2) \notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1, 2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו־ D .

$\forall$ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$. כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

דוגמה: $\frac{(x-1)^2}{x^6} > 0 \ \ \forall \{x \ne 0 \ , \ x \ne 1\}$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ־ 0 לכל x השונה מ־ 0 ושונה מ־ 1

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $6x^2 - x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 19}{12} = \ . \ . \ .$
זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\triangle}$ ובבדיקת החישוב.

$\emptyset$ - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-5}}{3} = \emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון ממשי.

ep - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד־צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד־צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5, 6) \ : \ min_{ep}$.

ab - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7, 11) \ : \ max_{ab}$.

cm^2 - סמ"ר , **cm^3** - סמ"ק , **asym.** - אסימפטוטה , **infl.** - פיתול (inflection)

$\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , למשל: $f \nearrow \forall x > 6$ - המשמעות: הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 6$

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x \to a+$ - שאיפה ל־ a מימין , למשל: '$x \to 0+$' הכוונה היא לשאיפה $0.1, 0.01, 0.001 \ . \ . \ .$
$x \to a-$ - שאיפה ל־ a משמאל , למשל: '$x \to 0-$' הכוונה היא לשאיפה $0.9, 0.99, 0.999 \ . \ . \ .$

lim - קיצור של limit, גבול.
למשל: $\lim_{x \to \infty}(x) = 5$: הגבול של $f(x)$ כאשר x 'שואף' ל־ ∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y = 5$).

$y = k_{(\to)}$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד. למשל: $y = 2_{(\to)}$
$y = k_{(\leftarrow)}$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד. למשל: $y = 1_{(\leftarrow)}$

$\exists$ - קיים , $\nexists$ - לא קיים

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.
57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. **(99-101 לחמש יחידות בלבד)**

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)180^\circ$.

מי שהאמת עמו - הוא הרבים, ואפילו הוא לבדו (שמואל יוסף עגנון)

נוסחאון הבגרות לארבע יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- חזקות: $(a \neq 0\ ,\ b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0\ ;\ a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ הם:

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר ההסתברות להצלחה היא p: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ - נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל-c)
- גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: $V = B \cdot h$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  שטח מעטפת: $M = P \cdot h$ (P - היקף הבסיס , h - גובה הגוף)

  פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$(x^t)' = t x^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו-$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי) , $\int \frac{1}{x} dx = \ln|\ \ | + c$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז: $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m} F(mx+b) + c$