

אלי מיטב

בגרויות מתמטיקה

471 - פתרונות מלאים

- 1 שאלות ברגרסיה _____
- 14 1 מבחן דוגמה _____
- 23 2 מבחן דוגמה _____
- 33 3 מבחן דוגמה _____
- 42 4 מבחן דוגמה _____
- 51 5 מבחן דוגמה _____
- 58 6 מבחן דוגמה _____
- 68 7 קיץ תש"פ - 2020 - מועד א _____
- 77 8 קיץ תש"פ - 2020 - מועד ב _____
- 86 9 חורף תשפ"א - 2021 _____
- 96 10 קיץ תשפ"א - 2021 - מועד א _____
- 106 11 קיץ תשפ"א - 2021 - מועד מיוחד _____
- 116 12 קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב _____
- 125 13 חורף תשפ"ב - 2022 _____
- 131 14 חורף תשפ"ב - 2022 - נבצרים _____
- 141 15 קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד א _____
- 148 16 קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד ב _____
- 155 17 - חורף תשפ"ג - 2023 _____
- 162 18 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד א _____
- 169 19 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד מיוחד _____
- 178 20 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב _____
- 185 סיווג שאלות לפי נושאים _____
- 191 המשפטים בגאומטריה _____
- 194 נוסחאון לארבע יחידות _____
- 197 טבלת ההתפלגות הנורמלית השלמה _____

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל מבחני בגרות לשאלון 471 לפי התכנית החדשה של משרד החינוך. בספר זה 20 מבחנים: 6 מבחני דוגמה ועוד 14 מבחנים שנערכו בפועל. החל מקיץ 2020 ועד קיץ 2023. לכל שאלה מוצגת תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לכל מבחן.

שאלון זה מקביל לשאלון 481. בתקופת החפיפה בין שתי התוכניות, היו שאלות שהופיעו בשני השאלונים. שאלות אלו אינן נכללות בספר זה, מתוך הנחה שתלמידי שאלון 471 משתמשים גם בספר של 481.

ספר זה יעודכן מידי שנה במבחנים שייערכו מידי שנה. ספר זה הוא עוד ספר של מבחני בגרות שיצאו בהוצאת שורש בתכנית היוצאת: משאלון 382 ועד שאלון 582. לשאלונים 481 ועד 582 (בלבד) יש גם גרסה של תשובות סופיות, ויש עוד שני ספרים של שאלות ממבחני בגרות המתאימות לכיתות י - 4 יחידות (481) ו-5 יחידות (581). ראו פרטים באתר ההוצאה.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל , \in - שייך , \nearrow - עליה , \searrow - ירידה , even - זוגי , odd - לא זוגי
 \cup - איחוד: היחס 'או' , \cap - חיתוך: היחס 'וגם' , \emptyset - קבוצה ריקה (אין פתרון)
 $\sqrt{\quad}$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. - מוחלט , ep. - נקודת קצה (end point)
 $\{x=0\}$ - ציר y , $\{y=0\}$ - ציר x , \exists - קיים , \notin - לא קיים .

בחלק הסטטיסטי: \bar{x} - ממוצע , z - ציון תקן , s - סטיית תקן , f - שכיחות (frequency)

cd - שכיחות מצטברת (commulative distribution) , median - חציון , mode - שכח , range - טווח

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכונה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו בארום שלמי תודה: לעופר ילין מפתח תקוה שפתרונותיו נתרמו לאתר של משרד החינוך וגם בהם נעזרתי, לשריף אמארה מכפר נֶלְפָה שהאיר פתרונות שלא חשבתי עליהם ושעמל על ההגהה, ולשרון חיים מפתח תקוה שהכין את סיווג השאלות לפי נושאים.

את החללים שבין השאלות והפתרונות הִלְחַתְתִּי בהבוקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדודות בעלות אופי לאומי או יהודי.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

א'י' א'ט'כ

הגרסיה - שאלות

השאלות להלן הופיעו במבחני הבגרות של שאלון 472. נושא זה הועבר לשאלון 471.

1. (חורף תשפ"ב - 2022)

חוקרים בדקו אם יש קשר בין קו הרוחב שבו נמצא אזור מסוים ובין שיעור מקרי סרטן העור (מלנומה) באותו אזור.

המחקר נערך בתשעה אזורים שונים בארצות הברית, במשך שלוש שנים.

בכל אחד מן האזורים נבדקו 100,000 תושבים.

נתוני המחקר מוצגים בטבלה שלפניך.

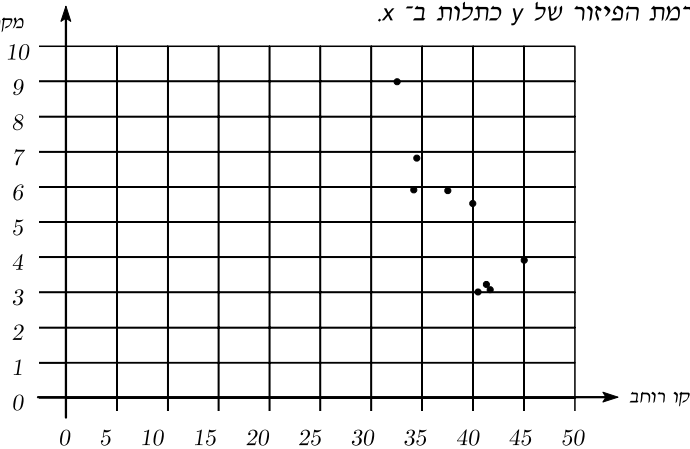
x - קו רוחב, y - שיעור מקרי מלנומה ל-100,000, \bar{x} - ממוצע, \bar{y} - ממוצע

S_x - סטית תקן, S_y - סטית תקן

x	32.8	33.9	34.1	37.9	40.0	40.8	41.7	42.2	45.0	$\bar{x} = 38.71$	$S_x = 4.04$
y	9	5.9	6.6	5.8	5.5	3.0	3.4	3.1	3.8	$\bar{y} = 5.12$	S_y

א. הראה כי סטית התקן של שיעורי מקרי המלנומה היא $S_y = 1.88$.

לפניך דיאגרמת הפיזור של y כתלות ב-x. מקרים ל-100,000 איש



ב. אחד מבין מקדמי המתאם (1)-(4) שלפניך מייצג את הקשר בין הנתונים.

קבע איזה מהם מייצג את הקשר, ונמק את קביעתך.

(1) $r = 1$ (2) $r = -0.857$ (3) $r = 0.651$ (4) $r = -1$

ג. מצא את משוואת קו הרגרסיה לניבוי מקרי המלנומה y על-פי קו הרוחב x.

ד. מהו הניבוי לשיעור מקרי המלנומה y בקו רוחב 36 ?

תשובות

1. **א.** $r = -0.857$ **ג.** $y = -0.399x + 20.57$ **ד.** 6.21 (מקרים ל-100,000)

2. (חורף תשפ"ב - 2022 - נבצרים)

במחקר על הקשר בין טמפרטורת המים x לבין כמות המדוזות y , נאספו 30 זוגות נתונים והתקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 26.5^\circ$, $S_x = 3.5^\circ$, $\bar{y} = 14$, $S_y = 2.5$. נערך ניבוי בעזרת ישר רגרסיה לכמות המדוזות לפי טמפרטורת המים. א. מה יהיה הניבוי לכמות המדוזות כאשר טמפרטורת המים היא הטמפרטורה הממוצעת 26.5° ? נתון בנוסף כי מקדם המתאם הוא $r = 0.8$.

ב. קבע אילו מההיגדים להלן נכון. נמק.

(1) מקדם המתאם אינו מאפשר ניבוי טוב כי הוא קטן מ-1.

(2) ככל שהטמפרטורה יורדת, נבא כמות גדולה יותר של מדוזות.

(3) ככל שהטמפרטורה עולה, נבא כמות גדולה יותר של מדוזות.

ג. מצא את ישר הרגרסיה לניבוי כמות המדוזות לפי הטמפרטורה.

ד. על פי ישר הרגרסיה, מה יהיה הניבוי לכמות המדוזות ביום שבו טמפרטורת המים היא 33° ?

3. (קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד א)

לבדיקת קשר בין ציוני בחינות הברגרות בשנה מסוימת במתמטיקה (x) ובמדעי המחשב (y), חושבו הממוצעים, סטיות התקן ומקדם המתאם של הציונים באותן בחינות.

נמצא כי: $\bar{x} = 64$, $\bar{y} = 72$, $s_x = 14$, $s_y = 9$, $r = 0.77$.

א. מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי הציון במדעי המחשב על-פי הציון במתמטיקה.

דני נבחן באותה שנה במתמטיקה ובמדעי המחשב. הציון שקיבל במתמטיקה היה 90.

ב. מהו הציון המשוער של דני במדעי המחשב, על-פי ישר הרגרסיה שמצאת?

לכל ציון במתמטיקה הוסיפו 4 נקודות (פקטור).

ג. לגבי כל אחד מן הגדלים: (1) \bar{x} (2) s_x (3) r - האם הוא גדל, קטן, או לא השתנה? נמק

בשנה שאחרי כן נמצא כי הממוצעים וסטיות התקן היו שוות לאלו שהתקבלו בשנה הנתונה לעיל

באותן בחינות. ידוע כי ישר הרגרסיה של הציונים באותה שנה היה $y = mx + 43.2$.

ד. (1) מצא את הערך של m (2) מצא את מקדם המתאם של הציונים בשנה זו.

מי שמנסה לעשות רושם - זה הרושם שהוא עושה



2. א. 14 ב. היגד (3) ג. $y = \frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}$ ד. 18 (מדוזות)

3. א. $y = 0.495x + 40.32$ ב. $y \approx 85$ ג. גדל (1)-(3) ללא שינוי ד. (1) $m = 0.45$ (2) $r = 0.7$

4. (קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד ב)

מנהל חברה בדק את הקשר בין הוצאה החודשית של החברה על פרסום מוצריה, ובין ההכנסות מן המכירות שלה בחודש שלאחר מכן. הוא בדק נתונים ממספר חודשים רצופים. בטבלה מוצגים הנתונים על ההוצאות וההכנסות באלפי שקלים.

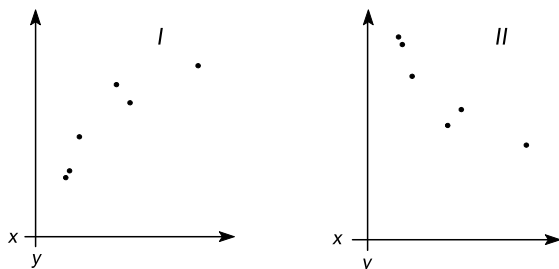
48	28	24	13	10	9	הוצאה על פרסום (x)
510	400	450	300	200	180	הכנסות ממכירות בחודש שלאחר מכן (y)

המנהל חישב ומצא כי ממוצע ההוצאות לחודש על פרסום הוא $\bar{x} = 22$

וסטית התקן היא $s_x = 13.6$.

ממוצע ההכנסות ממכירות לחודש הוא $\bar{y} = 340$ וסטית התקן היא $s_y = 123.4$.

לפניך שתי דיאגרמות פיזור. אחת מהן מתארת את הקשר בין שני המשתנים (x ו- y).



א. מהי הדיאגרמה המתארת את הקשר בין שני המשתנים? נמק.

נתונים ארבעה מקדמי מתאם: $r = 0.9$, $r = 1$, $r = -0.9$, $r = -0.7$.

ב. אחד מארבעת מקדמי המתאם מתאים לנתונים. קבע איזה מהם הוא זה. נמק.

ג. מהי משוואת ישר הרגרסיה לניבוי ההכנסות ממכירות כתלות בהוצאה על פרסום?

ד. על פי ישר הרגרסיה שמצאת, מהי ההערכה להכנסות ממכירות (באלפי שקלים),

עבור הוצאה של 19,000 שקלים לחודש על פרסום? נמק.

החברה המירה את ההוצאות וההכנסות בשקלים להוצאות והכנסות בדולרים

(ולכן כל המספרים בטבלה קטנו בערך פי 3).

ה. מהי ההשפעה של המרת השקלים לדולרים על כל אחד מן הגדלים שלפניך

(כלומר: האם הוא גדל, קטן, או לא השתנה)? נמק.



5. (חורף תשפ"ג - 2023)

במחקר שנועד לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון, השתתפו 9 מעשנים שנכחו בקורס. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומית לפני הקורס (x), וצריכת הסיגריות היומית לאחר שבוע מתחילת הקורס (y). להלן הנתונים שהתקבלו:

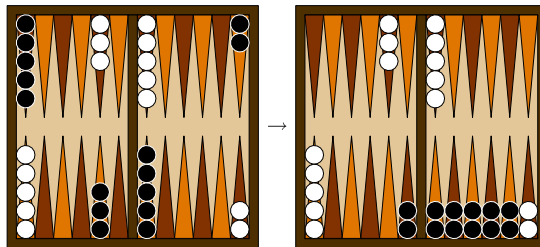
x	40	30	28	25	22	22	20	15	5	צריכת הסיגריות לפני הקורס
y	30	30	24	22	22	20	19	10	3	צריכת הסיגריות לאחר שבוע מתחילת הקורס

- א. חשב את ממוצע צריכת הסיגריות היומית למשתתף במחקר לפני הקורס ואת ממוצע צריכת הסיגריות היומית למשתתף במחקר לאחר שבוע מתחילת הקורס.
- ב. סרטט דיאגרמת פיזור של y כתלות ב־ x (כל משבצת מייצגת שתי סיגריות ליום).
- ג. על פי הדיאגרמה שסרטטת, בחר במקדם המתאם המתאים לנתונים מבין המספרים שלפניך, ורשום אותם: $r = -0.633$, $r = 0.212$, $r = 0.949$, $r = 1$.

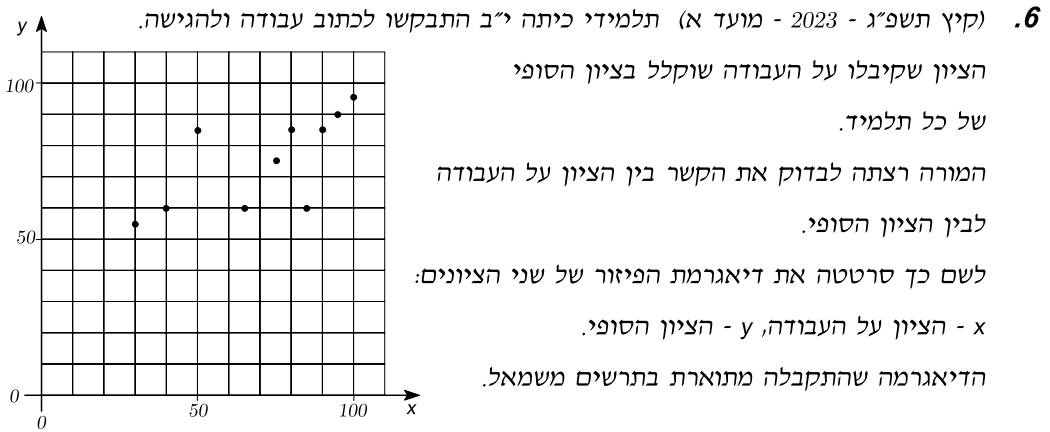
נתונות סטיות התקן $S_y = 8.26$, $S_x = 9.226$.

- ד. מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x.
- ה. אלעד מעשן 21 סיגריות ביום. הוא רוצה להשתתף בקורס לגמילה מעישון. על-פי ישר הרגרסיה שמצאת, מהו הניבוי לצריכת הסיגריות היומית שלו לאחר שבוע מתחילת הקורס?

בציור השמאלי מתואר מצב הפתיחה בשש־בש.



כיצד יכול השחור, על-ידי שלוש הטלות של קוביות לסגור את הלבן כמתואר בציור הימני. השחור יכול לבחור כל תוצאת הטלה שירצה. הלבן אינו מגיב. שלושה כלים שחורים נגרעו מהציור הימני בכוונה, שלא לסייע בפתרון...



- א. האם אפשר להסיק מן הדיאגרמה הנתונה שכל תלמיד שקיבל על העבודה ציון גבוה יותר מתלמיד אחר, קיבל בהכרח ציון סופי גבוה יותר מן התלמיד האחר? נמק.
- ב. אחד מן המספרים שלפניך הוא מקדם המתאם המתאים לקשר בין שני המשתנים. קבע איזה מהם הוא זה: 1.6 , -0.8 , 0.999 , 0.675 .

נתונים הממוצעים וסטיות התקן של שני המשתנים: $\bar{x} = 71$, $s_x = 23$, $\bar{y} = 75$, $s_y = 14$.

ג. מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי הציון הסופי על-פי הציון על העבודה.

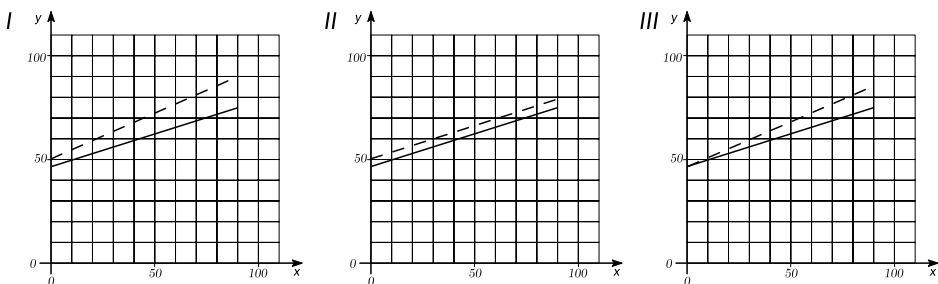
הוחלט להעלות את הציון הסופי של כל תלמיד ב־5 נקודות,

ובעקבות העלאה זו התקבל ישר רגרסיה חדש.

ד. (1) האם השתנתה סטית התקן s_y לאחר העלאת הציונים?

(2) אחד הגרפים שלפניך מייצג את הישר הישן, שלפני העלאת הציון הסופי (הקו האחיד),

ואת הישר החדש, שאחרי ההעלאה (הקו המקוקו). קבע איזה גרף הוא זה. נמק.



ה. תלמיד קיבל ציון 71 על העבודה שלו.

מה צריך להיות הציון הסופי שלו (לאחר ההעלאה בציון),

כדי שהנקודה המייצגת את שני הציונים שלו תהיה על קו הרגרסיה החדש?



6. א. לא ב. $r = 0.675$ ג. $y = 0.41x + 45.89$ ד. (1) לא (2) II ה. $y = 80$

7. (קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד מיוחד)

בעל מטע התעניין בקשר הליניארי שבין קוטר השזיפים (המשתנה x) לבין משקלם (המשתנה y). הוא בחר באקראי 4 שזיפים, מדד את הקוטר (במילימטרים) של כל אחד מהם, ומדד את המשקל (בגרמים) של כל אחד מהם. נמצא כי $S_y < S_x$ (סטית התקן של משתנה הקוטר גדולה מסטית התקן של משתנה המשקל), וכי מקדם המתאם הוא $r = 0.8$. לאחר מכן הוא חישב את ישר הרגרסיה לניבוי משקלם של השזיפים לפי קוטרם.

א. (1) הבע באמצעות S_x ו- S_y את שיפוע ישר הרגרסיה.

(2) האם שיפוע ישר הרגרסיה גדול מ-1 או קטן מ-1? נמק.

נתון כי ישר הרגרסיה לניבוי משקל השזיפים לפי קוטרם הוא $y = \frac{3}{4}x + 15$, וכי $\bar{x} = 80$.

שזיף	a	b	c	d
y	70	70	80	?

בטבלה נתוני המשקל של שלושה מתוך ארבעת השזיפים:

ב. (1) מצא את המשקל של שזיף d.

(2) מצא את סטית התקן של משקל השזיפים.

(3) מצא את סטית התקן של קוטר השזיפים.

Pentomino

Pentomino הוא משחק הרכבה הכולל 12 חלקים.
 כל חלק מורכב מ-5 ריבועים.
 ישנם 12 צירופים אפשריים של 5 ריבועים עם צלע משותפת, ואלו הם 12 חלקי ההרכבה.
 Pent - מיוונית 5, ו-omino - על משקל משחק Domino.
 בסך הכל שטח כל החלקים הוא $12 \times 5 = 60$ יחידות ריבועיות.
 ניתן להרכיב מהן מלבנים בגדלים 6×10 , 5×12 , 4×15 , 3×20 .
 ישנם 2339 פתרונות למלבן 6×10 , 1010 פתרונות למלבן 5×12 , 368 פתרונות ל- 4×15 ושני פתרונות בלבד ל- 3×20 .

6×10

5×12

4×15

3×20

8. (קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב)

מרצה באוניברסיטה רצתה לבדוק אם היעדרות משיעורים בקורס שנתי (המשתנה x) קשורה ליניארית לציון במבחן הסופי (המשתנה y).

נתון: ממוצע ההיעדרות מן השיעורים היה $\bar{x} = 10$, הציון הממוצע היה $\bar{y} = 70$,

ומקדם המתאם היה שלילי ($r < 0$).

המרצה מצאה את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y מ- x .

א. אחת מן המשוואות שלפניך היא המשוואה שמצאה המרצה.

קבע איזו מהן היא אותה משוואה. נמק.

$$(1) \quad y = 10x - 30 \quad (2) \quad y = x + 60 \quad (3) \quad y = -2x + 70 \quad (4) \quad y = -2x + 90$$

המרצה חישה את סטיות התקן עבור היעדרות מן השיעורים ועבור הציונים במבחן הסופי,

$$\text{וקיבלה: } S_x = 4, S_y = 10.$$

ב. חשב את מקדם המתאם r .

ג. מהו מספר היעדרויות שישר הרגרסיה מנבא עבורו ציון 80?

דוד, מרצה אחר, רצה לערוך את אותה בדיקה בנוגע לתלמידיו.

הוא מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y מ- x .

וגילה כי עבור כל מספר של היעדרויות - הישר מנבא תמיד את הציון 65.

ד. מצא את ערכו של כל אחד מן המדדים שבתת-סעיפים (1)-(2) עבור התלמידים של דוד:

(1) שיפוע ישר הרגרסיה.

(2) הציון הממוצע (\bar{y}).

ה. על-פי הנתונים שבשאלה, האם אפשר למצוא את הממוצע של היעדרויות התלמידים של דוד?

נמק.

מגדלי האנוי

החידה אודות מגדלי האנוי היא אולי החידה המפורסמת ביותר במתמטיקה.

חיבר אותה מתמטיקאי צרפתי בשם אדוארד לוקה (Edouard Lucas, 1842-1891).

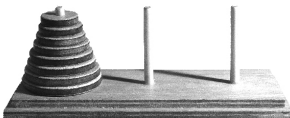
מציע לחפש אותה ברשת. במקור החידה על 64 טבעות. מספר הצעדים על מנת לפתור

את החידה הוא $2^{64} - 1$. מספר זה הוא המספר: 18, 446, 744, 073, 709, 551, 615.

בשניות זה למעלה מ-580 מיליארד שנים...

אם נניח מטבעות של 5 שקלים זה על גב זה - גובהם יהיה כארבע שנות אור.

הרחק הרחק ממערכת השמש שלנו...



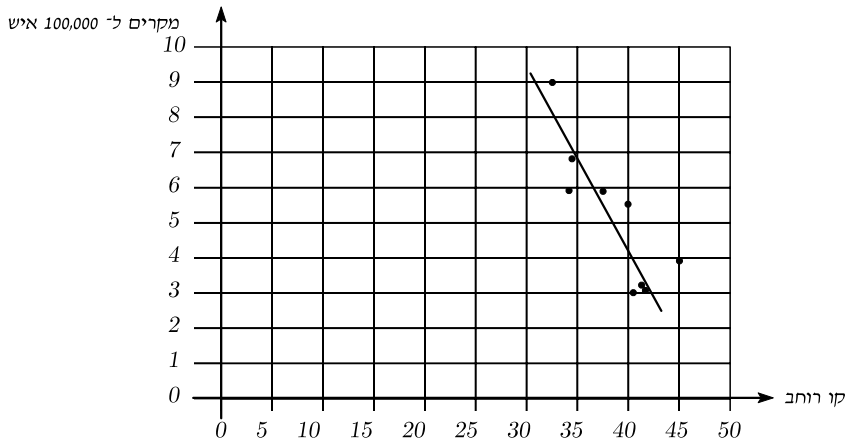
גרסיה - פתרונות

1. א.

y	9	5.9	6.6	5.8	5.5	3.0	3.4	3.1	3.8
$y - \bar{y}$	3.88	0.78	1.48	0.68	0.38	-2.12	-1.72	-2.02	-1.32
$(y - \bar{y})^2$	15.05	0.61	2.19	0.46	0.14	4.49	2.96	4.08	1.74

$$S_y = \sqrt{\frac{15.05+0.61+2.19+0.46+0.14+4.49+2.96+4.08+1.74}{9}} = \frac{\sqrt{31.72}}{3} \Rightarrow S_y = 1.88 \quad (\checkmark)$$

ב.



הקו המסתמן הוא קו יורד, ולכן $r = -1$ או $r = -0.857$.

כש $r = \pm 1$ - הנקודות נמצאות על קו ישר אחד, מה שאינו במקרה הנתון. לכן: $r = -0.857$.

ג.

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = -0.857 \cdot \frac{1.88}{4.04} = -0.3988$$

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}) \Rightarrow y - 5.12 = -0.399(x - 38.71) = -0.399x + 15.45 \Rightarrow y = -0.399x + 20.57$$

ד.

$$x = 36 \Rightarrow y = -0.399 \cdot 36 + 20.57 = 6.21$$

הניבוי לשיעור מקרי המלנומה בקו רוחב 36 הוא בערך 6.21 מקרים ל-100,000 תושבים.

2. א. קו הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים.

לכן, כשהטמפרטורה ממוצעת, גם כמות המדוזות ממוצעת, כלומר: 14 מדוזות.

ב.

המקדם $r = 0.8$ קרוב למקדם הדטרמיניסטי $r = 1$. זה אומר שהניבוי יהיה ניבוי טוב.

כיון שהמקדם חיובי, אז ככל ש- x יגדל - גם y יגדל.

לכן, ככל שהטמפרטורה עולה - כמות המדוזות עולה. **היגד (3) נכון.**

ג.

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = 0.8 \cdot \frac{2.5}{3.5} = \frac{4}{7}, \quad y - \bar{y} = m(x - \bar{x}) \Rightarrow y - 14 = \frac{4}{7}(x - 26.5) \Rightarrow y = \frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}$$

ד.

$$x = 33 \Rightarrow y = \frac{4}{7} \cdot 33 - 1\frac{1}{7} = 17\frac{5}{7} \Rightarrow \text{מספר המדוזות הצפוי הוא 18}$$

$$\bar{x} = 64, \bar{y} = 72, s_x = 14, s_y = 9, r = 0.77$$

$$m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0.77 \cdot \frac{9}{14} = 0.495$$

$$(64, 72) \Rightarrow y - 72 = 0.495(x - 64) \Rightarrow y - 72 = 0.495x - 31.68$$

$$\Rightarrow y = 0.495x + 40.32$$

ב.

$$x = 90 \Rightarrow y = 0.495 \cdot 90 + 40.32 \Rightarrow y = 84.87 \approx 85$$

ג. (1) השתנה. תוספת של קבוע לכל אחד מהנתונים, מעלה את הממוצע בדיוק באותו קבוע.

$$\Rightarrow \bar{x}_{new} = 64 + 4 \Rightarrow \bar{x} = 68$$

(2) לא השתנתה. תוספת הקבוע לכל אחד מהנתונים, מזיזה את עקומת ההתפלגות ימינה,

אך אינה משנה את הפיזור, ולכן סטית התקן לא השתנתה.

(3) לא השתנה. מקדם המתאם שווה לממוצע מכפלות ציוני התקן:

$$r = \frac{1}{n \cdot s_x \cdot s_y} \cdot ((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}))$$

ההפרשים $(x_i - \bar{x})$ נותרו כשהיו כי התוספת היתה גם ל- x_i וגם לממוצע.

ההפרשים $(y_i - \bar{y})$ נותרו כשהיו כי בנתוני המבחן במדעי המחשב לא היו שינויים.

סטיות התקן כאמור נותרו ללא שינוי, ובודאי כך גם n . לכן r נותר ללא שינוי.

ד. (1) מכיון שהממוצעים לא השתנו, הרי שמשוואת הרגרסיה באותה שנה עוברת אף היא

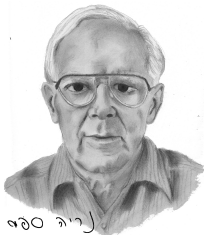
בנקודת הממוצעים $(64, 72)$. נציב:

$$y = mx + 43.2 \Rightarrow 72 = m \cdot 64 + 43.2 \Rightarrow 64m = 28.8 \Rightarrow m = 0.45$$

(2)

$$m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} \Rightarrow 0.45 = r \cdot \frac{9}{14} \Rightarrow r = 0.45 \cdot \frac{14}{9} \Rightarrow r = 0.7$$

ילדים מתמטיקאים



מרסין גרדנר (1914-2010) היה מלך החידות האמריקאי בדור האחרון.

כתב עשרות ספרים וטורים בעיתונות שעסקו במדע פופולארי, בחידות מתמטיות,

חידות חשיבה ובקסמים.

אמרו עליו שהוא הפך הרבה ילדים למתמטיקאים, והרבה מתמטיקאים לילדים...

4. א. לפי הטבלה נראה שככל שההוצאה על פרסום גדלה - הכנסות ממכירות גדלה, למעט חריג בעמודה (28, 400), ולכן הגרף המתאים הוא הגרף שמראה מגמת עליה, וזה גרף 1.

ב. אין קו ישר שעליו מוצבות כל הנקודות. לכן $r \neq 1$.
הקו במגמת עליה, ולכן המקדם חיובי, ומכאן $r = 0.9$.

ג.

$$m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0.9 \cdot \frac{123.4}{13.6} = 8.166$$

$$(22, 340) \Rightarrow y - 340 = 8.166(x - 22) = 8.166x - 179.652 \Rightarrow y = 8.166x + 160.348$$

נקודת הממוצעים

ד.

$$x = 19 \Rightarrow y = 8.166 \cdot 19 + 160.348 = 315.502$$

ה. (1) חילוק כל נתון ב-3, מצמצם גם את הממוצע, ולכן \bar{x} קטן (פי שלושה).

(2) חילוק כל נתון ב-3 מקטין את פיזור הנתונים

ולכן גם סטית התקן, s_x קטנה (פי שלושה).

(3)

$$r = \frac{1}{n \cdot s_x \cdot s_y} \cdot ((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}))$$

ההפרשים $x_i - \bar{x}$ ו- $y_i - \bar{y}$ קטנו (כל אחד) פי שלושה,

ולכן המכפלה שלהם קטנה פי תשעה. זה - המונה.

מכיון שגם s_x וגם s_y קטנו (כל אחד) פי שלושה, הרי שמכפלתם קטנה פי תשעה,

מה שמשאיר את היחס בין המונה למכנה, כשהיה. ולכן: r לא השתנה.

קיים מספר בן 67 ספרות, המורכב מהספרות '6' ו-'7' בלבד, ש- 2^{67} מחלק אותו.

כלומר: קיימים המספרים x ו- y כך ש: $2^{67} x = y$ (x ו- y טבעיים, כמובן)

כאשר y הינו מספר בן 67 ספרות המורכב מהספרות '6' ו-'7' בלבד.

וכך זה נראה:

$$6, 677, 767, 667, 676, 666, 776, 766, 667, 777, 767, 666, 677, 766, 776, 777, 777, 777, 777, 666, 766, 667, 776 \\ = 2^{67} \times 45, 250, 313, 829, 053, 138, 281, 370, 553, 831, 260, 951, 302, 463, 537, 892$$

יש לכך הוכחה שניתן להסבירה גם ברמה תיכונית.

כשמבינים את ההוכחה, אז התופעה הרבה יותר רחבה:

לכל n טבעי (גדול ככל שיהיה) קיים מספר המורכב מהספרות '1' ו-'2' בלבד, או '2' ו-'3' בלבד, וכו' עד '8' ו-'9'

בלבד (שתי ספרות טבעיות עוקבות בין '1' ל-'9') כך ש- 2^n מחלק אותו.

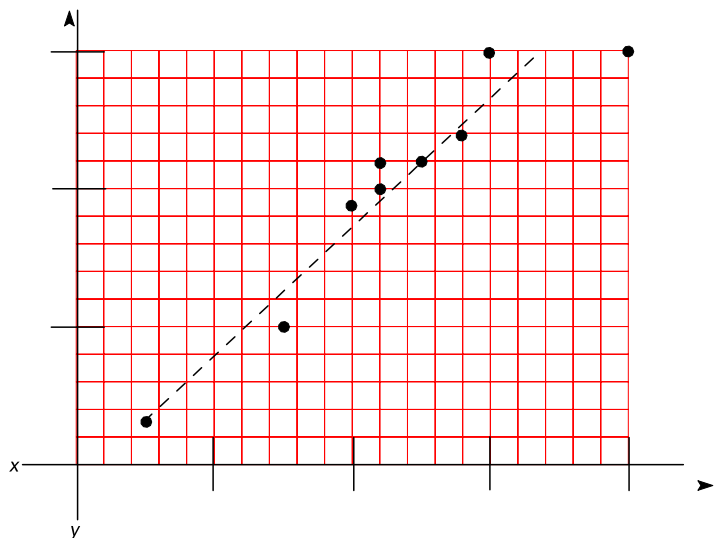
לשם המחשה: קיים מספר המכיל 100,000,000,000 (מאה מיליארד) ספרות שכול מורכבות מ-'8' ו-'9' בלבד (או

מ-'7' ו-'8' בלבד וכו') כך ש- $2^{100,000,000,000}$ מחלק אותו!

$$\bar{x} = \frac{40+30+28+25+22+22+20+15+5}{9} \Rightarrow \bar{x} = 23$$

א. 5

$$\bar{y} = \frac{30+30+24+22+22+20+19+10+3}{9} \Rightarrow \bar{y} = 20$$



ב.

ג. הנקודות אינן על קו ישר אחד. נמצאות במגמת עליה בקרבה לשיפוע $m = 1$. לכן: $r = 0.949$

ד.

$$\bar{x} = 23, \bar{y} = 20, S_x = 9.226, S_y = 8.26, r = 0.949$$

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = 0.949 \cdot \frac{8.26}{9.226} = 0.85$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (23, 20), y - \bar{y} = m(x - \bar{x}) \Rightarrow y - 20 = 0.85(x - 23) \Rightarrow y = 0.85x + 0.45$$

ה.

$$x = 21, 5 \leq 21 \leq 40 \Rightarrow y = 0.85 \cdot 21 + 0.45 = 18.3$$

	123456789	987654321	
	123456780	087654321	
	123456700	007654321	
	123456000	000654321	
	123450000	000054321	
	123400000	000004321	
	123000000	000000321	
	120000000	000000021	
	<u>100000000</u>	<u>000000001</u>	
	1083676269	1083676269	

6. א. לא. דוגמה נגדית:

(65, 60) - הנקודה הרביעית משמאל, מול (50, 85) - הנקודה השלישית משמאל.

$$x_4 = 65, x_3 = 50 \Rightarrow x_4 > x_3, y_4 = 60, y_3 = 85 \Rightarrow y_4 < y_3$$

ב. המגמה היא של עליה, לכן -0.8 נפסל.

הנקודות אינן על קו ישר או קרוב אליו, לכן 0.999 נפסל.

כפי שזה נראה מקדם המתאם הוא בין $\frac{1}{2}$ לבין פחות מ-1, לכן: $r = 0.675$

ג.

$$\bar{x} = 71, s_x = 23, \bar{y} = 75, s_y = 14, r = 0.675 \Rightarrow m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0.675 \cdot \frac{14}{23} = 0.41$$

$$(71, 75) \Rightarrow y - 75 = 0.41(x - 71) / + 75 \Rightarrow y = 0.41x + 45.89$$

ד. (1) לא. העלאה בקבוע של כל אחד מהציונים הסופיים אינה משנה את פיזור הציונים,

מכיון שגם הממוצע גדל באותו קבוע, ולכן ההפרש $(y_i - \bar{y})^2$ בחישוב סטית התקן

נשאר אותו הפרש. לכן s_y , סטית התקן, לא השתנתה.

(2) מקדם המתאם הוא ממוצע של מכפלות ציוני התקן:

$$r = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x_1 - \bar{x}}{s_x} \cdot \frac{y_1 - \bar{y}}{s_y} + \dots + \frac{x_n - \bar{x}}{s_x} \cdot \frac{y_n - \bar{y}}{s_y} \right)$$

העלאה בקבוע של הציון הסופי, תעלה באותו קבוע גם את הממוצע של משתנה זה ל- $\bar{y} = 80$

לכן, הסטיה $y - \bar{y}$ לא תשתנה, וכך גם ציון התקן לא ישתנה.

מכאן שמקדם המתאם לא ישתנה, כלומר: קו הרגרסיה החדש מקביל לישן,

עם תזוזה אנכית של 5 יחידות כלפי מעלה של קו הרגרסיה הישן, וזה מתאים לגרף II.

ה. משוואת קו הרגרסיה לאחר ההעלאה היא $y = 0.41x + 50.89$

מכיון שציון העבודה שלו שווה לממוצע של ציוני העבודות - 71,

לכן הציון הסופי שלו יהיה גם כן הממוצע: $75 + 5 = 80$.

(הצבת $x = 71$ במשוואת הרגרסיה החדשה, תתן כמובן אותה תוצאה.)

תשובה של חיים ויצמן

חיים ויצמן (1874-1952). איש התנועה הציונית ונשיאה הראשון של מדינת ישראל.

מספר שנים לפני הצהרת בלפור שאל אותו חבר בית הלורדים האנגלי:

מדוע אתם היהודים מתעקשים על פלשתינה, כאשר ישנן כל-כך הרבה מדינות לא-מפותחות בהן אתם יכולים להתיישב בנוחות רבה יותר?

ענה לו ויצמן: "זה כמו שאני אשאל אותך מדוע נסעת בסוף השבוע שלושים קילומטר כדי לבקר את אמא שלך,

כשיש כל כך הרבה זקנות שגרות ממש ברחוב שלך" . . .

7. א. (1)

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} \Rightarrow m = 0.8 \cdot \frac{S_y}{S_x}$$

(2)

$$0 < S < 1, S_y < S_x \Rightarrow 0 < \frac{S_y}{S_x} < 1 \Rightarrow 0 < 0.8 \cdot \frac{S_y}{S_x} < 1 \Rightarrow m < 1$$

ב. (1)

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \{y = \frac{3}{4}x + 15\}, \bar{x} = 80 \Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{4} \cdot 80 + 15 = 75$$

$$\bar{y} = \frac{70+70+80+d}{4} = 75 \Rightarrow 55 + \frac{d}{4} = 75 \Rightarrow \frac{d}{4} = 20 \Rightarrow d = 80_{gr}$$

(2)

שויף	a	b	c	d
y	70	70	80	80

$$S_y = \sqrt{\frac{(70-75)^2 \cdot 2 + (80-75)^2 \cdot 2}{4}} = \sqrt{\frac{50+50}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} \Rightarrow S_y = 5_{gr}$$

(3)

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} \Rightarrow \frac{3}{4} = 0.8 \cdot \frac{5}{S_x} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4}{S_x} \Rightarrow S_x = \frac{4 \cdot 4}{3} \Rightarrow S_x = 5\frac{1}{3}_{mm}$$

8. א. סטיות התקן אינן 0, כי אחרת מקדם המתאם אינו מוגדר:

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x}) \cdot (y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x}) \cdot (y_n - \bar{y})}{n \cdot S_x \cdot S_y}$$

$$S_x > 0, S_y > 0 \Leftrightarrow \text{סימן מקדם המתאם } m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} \text{ הוא גם סימן שיפוע ישר הרגרסיה.}$$

מכיון ש- $r < 0$ אז גם $m < 0$.

ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים (10, 70). מתאים למשוואה (4): $y = -2x + 90$

ב.

$$m = r \cdot \frac{S_x}{S_y} \Rightarrow -2 = r \cdot \frac{10}{4} \Rightarrow r = \frac{-2 \cdot 4}{10} \Rightarrow r = -\frac{4}{5}$$

ג.

$$y = 80 \Rightarrow -2x + 90 = 80 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

ד. (1) דוד קיבל את ישר הרגרסיה $y = 65$. ולכן שיפוע ישר הרגרסיה הוא אפס: $m = 0$.

(2) אם כל ערכי y הם 65 - אז זהו כמובן גם הממוצע: $\bar{y} = 65$.

ה. מכיון שכל ערכי y הם 65 : $y = 65$ הרי שאין קשר בין ערכי x לערכי y .

לכן גם לא ניתן למצוא את ממוצע היעדרויות התלמידים (\bar{x}).

נורמן שורצקופף (1934-2012) היה מפקד כוחות הקואליציה במלחמת המפרץ הראשונה (1991).

כשנשאל אם אין מקום לדעתו למי שנתן מחסה וסיוע למחבלים שבצעו את ההתקפה על בנייני התאומים.

הוא השיב: "אני מאמין שסליחה לאנשים אלה היא פונקציה ש-לוקים ממלא.

תפקידנו הוא לארגן את הפגישה ביניהם. . . ."

מבחן 20 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: חמש שאלות מהשאלות 1-8

פרק ראשון - סטטיסטיקה והסתברות

1. חברת קוסמטיקה ערכה מחקר שבדק את קצב התארכות שֵׁער הראש של אנשים בס"מ לשנה.

החברה בדקה מספר רב של אנשים.

היא גילתה שקצב התארכות השיער שלהם מתפלג נורמלית, והתבררו שני נתונים:

(I) השיער של 50% מן הנבדקים התארך בפחות מ- 12 ס"מ בשנה.

(II) השיער של 33% מן הנבדקים התארך ביותר מ- 12.56 ס"מ בשנה.

א. מהו קצב ההתארכות הממוצע של השיער של הנבדקים?

ב. מהי סטית התקן של קצב התארכות השיער של הנבדקים?

חברת הקוסמטיקה הכריזה שהיא הצליחה לפתח שמפו

שמגביר ב- 10% את קצב התארכות השיער.

ג. לפי ההכרזה, מה יהיה הממוצע החדש ומה תהיה סטית התקן החדשה

של קצב התארכות השיער בקרב אוכלוסית האנשים שישתמשו בשמפו זה?

ד. החברה בדקה מהו אחוז הנבדקים במחקר שקצב התארכות השיער שלהם

הוא בין הממוצע לבין סטית תקן אחת מעל הממוצע.

לפי הכרזת החברה, אם ישתמשו כל הנבדקים בשמפו שהיא פיתחה,

האם אחוז זה יגדל, יקטן או לא ישתנה? נמק.

27	20	25
22	24	26
23	28	21

לפניך ריבוע קסם שסכומו 72:

128	1	32
4	16	64
8	256	2

את ריבוע הקסם הזה ניתן להפוך לריבוע קסם של מכפלות:

מכפלת כל שורה, עמודה או אלכסון היא 4,096

$\frac{7}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{1}{2}$

הרעיון כאן הוא זה: - הפעל את חוקי החזקות על בסיסים שווים.



1. א. $\bar{x} = 12\text{cm}$ ב. $s = 1.273\text{cm}$ ג. $\bar{x}_{\text{new}} = 13.2\text{cm}$, $s_{\text{new}} = 1.4\text{cm}$ ד. לא ישתנה

2. מוכר טאבלטים בדק את הקשר הליניארי בין גודל המסך של טאבלט באינצ'ים (המשתנה x) לבין מספר הדקות שנדרשו ללקוח להחליט לקנות את הטאבלט (המשתנה y).
ביום מסוים הוא מכר 8 דגמים שונים של טאבלטים.

לפניך טבלה המתארת את הנתונים של שמונת הדגמים שהוא מכר באותו יום:

x	9	9	9	9	11	11	11	11
y	2	10	10	10	10	10	10	18

א. חשב את הממוצעים ואת סטיות התקן של שני המשתנים, x ו- y .

ב. חשב את מקדם המתאם r .

ג. מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי מספר הדקות לקבלת החלטה כתלות בגודל המסך.

בעל החנות הזמין לחנותו דגם חדש של טאבלט, שגודל המסך שלו הוא 10 אינצ'ים.

ד. על-פי ישר הרגרסיה שמצאת, מהו ניבוי מספר הדקות לקבלת ההחלטה עבור דגם זה?

מוכר חדש בחנות גרם לקיצור ב- 20% של זמן קבלת ההחלטה לקנות כל אחד מדגמי הטאבלט.

ה. עבור כל אחד מהמדדים שלפניך, קבע אם ערכו יגדל, יקטן או לא ישתנה בעקבות שינוי זה.

(1) מקדם המתאם r .

(2) סטיות התקן של המשתנה y .

(3) שיפוע ישר הרגרסיה לניבוי מספר הדקות לקבלת ההחלטה בגודל המסך.

3. זהה לשאלה 3 בשאלון 481 של מועד זה.

ניתן להציג כל מספר שלם על-ידי שימוש בשלוש פעמים המספר 2, ללא שימוש ב-'-':

$$0 = \frac{\ln \frac{2}{2}}{2}$$

$$1 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}}}{\ln 2}, \quad -1 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$2 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

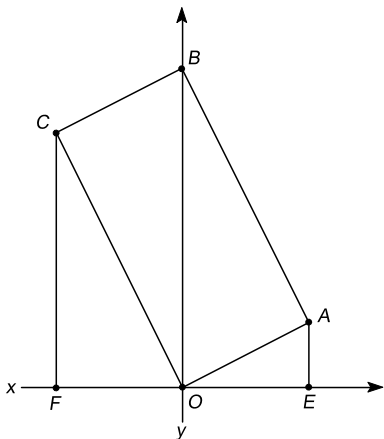
$$3 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

⋮

תשובות

2. א. $\bar{x} = 10, S_x = 1, \bar{y} = 10, S_y = 4$ ב. $r = \frac{1}{2}$ ג. $y = 2x - 10$ ד. 10 minutes

ה. (1) ללא שינוי (2) תקטן (3) יקטן



פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. הקדקוד B במקבילית OABC מונח על ציר y .

והנקודה O היא ראשית הצירים.

מן הקדקודים A ו- C העבירו אנכים לציר x , החותכים אותו בנקודות E ו- F בהתאמה.

נתון: $\angle AOE = \angle COB$.

א. (1) הוכח: $\angle AOE = \angle OCF$.

(2) הוכח: $\triangle OCF \sim \triangle AOE$.

טח המשולש OCF גדול פי 4 משטח המשולש AOE.

משוואות הישרים AE ו- CF הן $x = 4$ ו- $x = -4$ בהתאמה.

ב. (1) מצא את יחס הדמיון בין המשולשים OCF ו- AOE.

(2) מצא את אורכי הצלעות OE ו- CF.

(3) מצא את שיעורי הקדקודים C ו- A.

ג. מצא את שיעורי הקדקוד B.

ד. הוכח כי המקבילית OABC היא מלבן.

אלכסוני המלבן OABC נפגשים בנקודה M.

ה. האם נכון כי $S_{\triangle AOE} + S_{\triangle CFO} = 2 \cdot S_{\triangle ABM}$? נמק.

הרב יוסי שריד ממרצ

יוסי שריד היה חבר כנסת מטעם סיעת השמאל בכנסת ששמה 'מרצ'.

שם זה הינו גלגול שמם שתי מפלגות שמאל: 'רץ' של שולמית אלוני, ו-'מ' של מפ"ם.

עוד טרם קביעת שמה הנוכחי של סיעת מרצ. פעל (ועדיין פועל) במבשרת ציון מוסד חינוכי - כולל אברכים

ציוניים ששמו... 'מר"ץ' (מרכז צוותים).

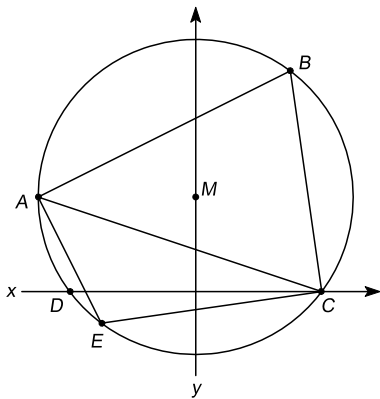
הרב שעומד בראש כולל זה הוא הרב... יוסי שריד.

הרב יוסי שריד והח"כ לשעבר יוסי שריד כמעט בני אותו גיל (הרב יליד 1939 והח"כ לשעבר יליד 1940).

שניהם עברו אירוע לב ראשון בשנת 1986 והיו מאושפזים מיטה ליד מיטה ברזומנית.

הרב יוסי שריד, שיש לו חוש הומור נפלא, אומר שלשניהם יש שני דברים משותפים:

הראשון הוא 'שהשם אחר' והשני הוא ששניהם מתפללים 'לקץ הימין'...



5. משולש חד-זווית ABC חסום במעגל.

נתון: $A(-5, 3)$, $B(3, 7)$.

מרכז המעגל M נמצא על ציר y.

המעגל חותך את ציר x בנקודות C ו-D.

א. (1) הראה כי שיעורי מרכז המעגל M הם $(0, 3)$.

(2) מצא את משוואת המעגל.

(3) מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ב. (1) מצא את אורך הצלע AC.

(2) מצא את גודל הזווית ABC.

הנקודה E נמצאת על הקשת הקטנה AC.

נתון: $EC = 7$.

ג. מהו גודל הזווית AEC? נמק.

ד. מצא את שטח המשולש AEC.

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רצינוניות ושל פונקציות שורש

6.7.8. זהות לשאלות 6-7-8 בשאלון 481 של מועד זה.

בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

משפט מורלי

אם נחלק כל זווית במשולש לשלוש זוויות שוות ונחבר את קדקודי המשושה הנוצר מחלוקה זו כמתואר בציור, נקבל משולש שווה-צלעות (מסומן באפור).
נקרא על שם מורלי (Frank Morley, 1860-1937), מתמטיקאי אנגלי.

השאלות

5. א. (2) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ (3) $C(4, 0)$, $D(-4, 0)$ ב. (1) $AC = \sqrt{90}$ (2) $\beta = 71.57^\circ$

ג. $\angle AEC = 108.43^\circ$ ד. $S_{\Delta} = 15.15$ (יחידות ריבועיות)

פתרון מבחן 20

1. א. התפלגות נורמלית סימטרית סביב הממוצע.

ב. אז אם קצב ההתארכות של 50% הוא פחות מ- 12_{cm} , אז זה גם הממוצע: $\bar{x} = 12_{cm}$

ג.

$$P(x > 12.56) = 0.33 \Rightarrow 1 - P(x < 12.56) = 0.33 \Rightarrow P(x < 12.56) = 0.67 \Rightarrow z = 0.44$$

$$\frac{x - \bar{x}}{s} = z \Rightarrow 0.44 = \frac{12.56 - 12}{s} = \frac{0.56}{s} \Rightarrow s = \frac{0.56}{0.44} \Rightarrow s = 1.273_{cm}$$

ג. כשהגידול ליניארי, הממוצע וסטית התקן משתנים בהתאם, ולכן:

$$\bar{x}_{new} = 12 \cdot 1.1 \Rightarrow \bar{x}_{new} = 13.2_{cm}, s_{new} = 1.273 \cdot 1.1 \Rightarrow s_{new} = 1.4_{cm}$$

ד. מכיון שהבדיקה נערכה בין סטית תקן אחת מעל הממוצע לבין הממוצע,

הרי שאין זה משנה מבחינה מספרית, אלא מבחינת שיעור הנבדקים, וזה קבוע.

$$(P = P(1) - P(0) = 0.841 - 0.5 = 0.341 = 34.1\% \text{ (במקרה שלנו)})$$

בקיצור: אחוז האוכלוסיה הנבדקת בתחום שצוין - לא ישתנה.

2. א.

x	9	9	9	9	11	11	11	11
y	2	10	10	10	10	10	10	18

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 4 + 11 \cdot 4}{8} \Rightarrow \bar{x} = 10, S_x = \sqrt{\frac{(9-10)^2 \cdot 4 + (11-10)^2 \cdot 4}{8}} = \sqrt{\frac{8}{8}} \Rightarrow S_x = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1 \cdot 2 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 18}{8} \Rightarrow \bar{y} = 10, S_y = \sqrt{\frac{(2-10)^2 \cdot 1 + (10-10)^2 \cdot 6 + (18-10)^2 \cdot 1}{8}} \Rightarrow S_y = 4$$

ב. נתעלם ממחזורים שערכם 0: (10 - 10). יש 6 כאלה.

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{n \cdot S_x \cdot S_y} = \frac{(9-10)(2-10) + (11-10)(18-10)}{8 \cdot 1 \cdot 4} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

ג.

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2, (\bar{x}, \bar{y}) = (10, 10) \Rightarrow y - 10 = 2(x - 10) \Rightarrow y = 2x - 10$$

ד.

$$y(10) = 2 \cdot 10 - 10 \Rightarrow 10_{minutes}$$

ה. קיצור זמן ההחלטה ב- 20% משנה גם את הממוצע וגם את סטית התקן בהתאם.

$$\bar{y}_{new} = 0.8 \cdot 10 = 8, S_{y_{new}} = 0.8 \cdot 4 = 3.2$$

(1) בנוסחה של r לעיל, הסטיה $(y_i - \bar{y})$ קטנה ב- 20% וגם סטית התקן קטנה ב- 20%,

לכן היחס בין המונה והמכנה נשאר כשהיה \Leftarrow מקדם המתאם לא ישתנה.

(2) סטית התקן תקטן ב- 20%, כי כל סטיה של נתון מהממוצע קטנה ב- 20%.

(3) $m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$ - לא משתנה. S_x לא משתנה. S_y קטן, לכן שיפוע הישר יקטן.

4

א. (1)

$$\angle AOE = \overset{(1)}{=} \angle COB = \overset{(2)}{=} \angle OCF$$

$$\Rightarrow \overset{(3)}{=} \angle AOE = \angle OCF \quad \checkmark$$

(2)

$$\angle CFO = \angle AEO = \overset{(1)}{=} 90^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{(4)}{=} \triangle OCF \sim \triangle AOE \quad \checkmark$$

ב. (1)

$$\frac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle AOE}} = \overset{(5)}{=} \left(\frac{CF}{OE}\right)^2 = \overset{(1)}{=} 4 \Rightarrow \frac{CF}{OE} = 2$$

(2)

$$x_E = \overset{(1)}{=} 4 \Rightarrow OE = 4, \quad \frac{CF}{OE} = \frac{CF}{4} = 2 \Rightarrow CF = 8$$

(3)

$$CF = 8 \Rightarrow y_C = 8, \quad x_C = x_F = -4 \Rightarrow C(-4, 8)$$

$$\frac{OF}{AE} = \overset{(6)}{=} 2 \Rightarrow \frac{4}{AE} = 2 \Rightarrow AE = 2 = y_A, \quad x_A = 4 \Rightarrow A(4, 2)$$

ג.

$$AB \parallel CO \Rightarrow m_{AB} = m_{CO} = \frac{8-0}{-4-0} = -2$$

$$x_B = 0 \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - 2}{0 - 4} = -2 \Rightarrow y_B - 2 = 8 \Rightarrow y_B = 10 \Rightarrow B(0, 10)$$

ד.

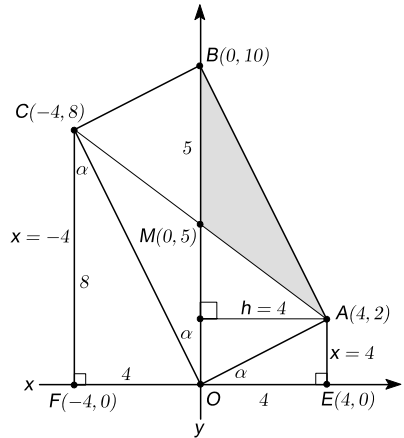
$$m_{BC} = \frac{10-8}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad m_{AB} = -2 \Rightarrow BC \perp AB \Rightarrow \overset{(7)}{=} \checkmark$$

ה.

$$M\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) \Rightarrow M(0, 5) \Rightarrow BM = y_B - y_M = 10 - 5 = 5$$

$$2 S_{\triangle ABM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot h = 5 \cdot 4 = 20$$

$$S_{\triangle AOE} + S_{\triangle CFO} = \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 8}{2} = 4 + 16 = 20 \Rightarrow \text{נכון}$$



(1) נתון (2) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי

(3) כלל המעבר (4) משפט דמיון זווית-זווית

(5) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

(6) יחס הדמיון (7) מקבילית שאחת מזוויותיה ישרה - היא מלבן

מאוד נחמד להיות חשוב. יותר חשוב להיות נחמד.

א. (1)

$$x_M = 0, M(0, 3)$$

$$\Leftrightarrow MA = MB (= R)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(0+5)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (3-7)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25} = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow 5 = 5 (\checkmark)$$

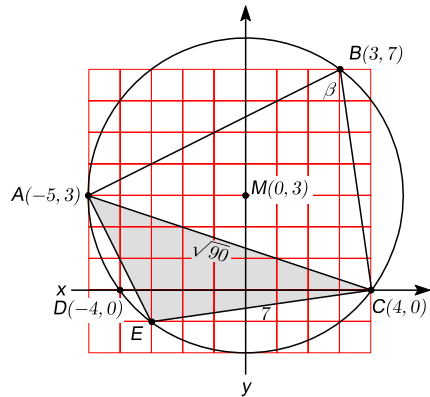
(2)

$$^2 = 25, M(0, 3) \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 25$$

(3)

$$y_C = y_D = 0 \Rightarrow x^2 + (0-3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow C(4, 0), D(-4, 0)$$



ב. (1) פיתגורס

$$AC = \sqrt{(-5-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{81+9} \Rightarrow AC = \sqrt{90}$$

(2) משפט הסינוסים

$$\triangle ABC: \frac{AC}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{90}}{\sin \beta} = 2 \cdot 5 \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{90}}{10} \Rightarrow \beta = 71.57^\circ$$

ג. זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל- 180° .

$$\angle AEC = 180^\circ - 71.57 \Rightarrow \angle AEC = 108.43^\circ$$

ד.

$$\triangle AEC: \frac{\sqrt{90}}{\sin 108.43^\circ} = \frac{7}{\sin \angle A} \Rightarrow \sin \angle A = \frac{7 \sin 108.43^\circ}{\sqrt{90}} = 0.7 \Rightarrow \angle A = 44.42^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 108.43^\circ - 44.42^\circ \Rightarrow \angle C = 27.14^\circ$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot AC \cdot \sin 27.14^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{90} \cdot \sin 27.14^\circ \Rightarrow S_{\Delta} = 15.15 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

בסדרת פיבונאצ'י יש אינסוף איברים שמסתיימים ב- n (גדול ככל שהיה) ספרות '9' !!!

לטענה זו יש 'הוכחת קיום' (מובאת בספרי 'מספרים מכושפים').

ההוכחה היא על עצם קיומה של התופעה, למרות שאין יודעים מהו האיבר ובאילו מקום סידורי בסדרה הוא ממוקם.

כך גם לגבי איברים המסתיימים ב- n פעמים '0'.

המשפטים בגאומטריה

1. זווית צמודות משלימות זו את זו ל- 180° .
2. זווית קודקודיות שוות זו לזו.
3. במשולש, מול זווית שוות מונחת צלעות שוות.
4. במשולש שווה-שוקיים, זווית הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה-שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה-צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה-זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180° .
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע-זווית-צלע.
18. משפט חפיפה זווית-צלע-זווית.
19. משפט חפיפה צלע-צלע-צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.
21. האלכסון הראשי בדרגון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי: אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי: אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי: אם סכום זוג זוויות חר-צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
 - א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
 - ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
 - ג. סכום כל זוג זוויות חר-צדדיות הוא 180° .
26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.
33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

תתפלאו, אבל word היא מילה בעברית.

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1 : 2 (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום את המשולש.
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180° .
57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכייהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.
77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.
79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.
80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.
82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.
84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.
86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.
88. אם במשולש ישר-זווית, זווית חדה של 30° , או הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.
89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, או מול ניצב זה זווית שגודלה 30° .
90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.
91. משפט תאלס המורחב:
- ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.
92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.
93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.
94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה לחלקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה).
- חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.
95. משפט דמיון צלע-זווית-צלע
96. משפט דמיון זווית-זווית
97. משפט דמיון צלע-צלע-צלע
98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הרמיון.
 ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הרמיון.
 ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הרמיון.
 ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הרמיון.
 ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הרמיון.
 ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הרמיון.
 ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הרמיון.
99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, או מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. (99-101 לחמש יחידות במבחן)
100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, או מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, או מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.
102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.
103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.
104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

היום אתה המבוגר ביותר שהיית והצעיר ביותר שתהיה.

נוסחאות הנגרות לארבע יחידות

אלגברה

נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

סדרה הנרסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	סכום
סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1 - q}$	$S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	

חוקות: $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

סטטיסטיקה

$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{N}$, $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{N}}$, $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, - נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל- b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

- שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

- גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: $V = B \cdot h$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = P \cdot h$ (P - היקף הבסיס, h - גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול, l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת

של u לפי x (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז: $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c$

סטטיסטיקה

- ממוצע:
$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{N}$$

כאשר f_1, f_2, \dots, f_n הן השכיחויות של x_1, x_2, \dots, x_n בהתאמה,

ו- $N = f_1 + f_2 + \dots + f_n$

- סטית תקן:
$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{N}}$$

- ציון תקן:
$$z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$

- מקדם המתאם r :
$$r = \frac{1}{N \cdot S_x \cdot S_y} \left((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \right)$$

- שיפוע ישר הרגרסיה:
$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$$

- משוואת ישר הרגרסיה:
$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$

וקטורים

- אורך של וקטור:
$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- מכפלה סקלרית:
$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

ההבדל בין זכוכית, שדרכה אדם רואה אנשים מצידה האחר,
לבין מַרְאָה, שבה אדם רואה רק את עצמו,
הוא - שהמַרְאָה מצופה בכסף . . .

הטבלה המלאה של ההתפלגות הנורמלית המצטברת

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
-2.9	0.0019	0018	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
-2.8	0.0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
-2.7	0.0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
-2.6	0.0046	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
-2.5	0.0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
-2.4	0.0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
-2.3	0.0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
-2.2	0.0139	0135	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
-2.1	0.0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
-2.0	0.0227	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
-1.9	0.0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0238	0233
-1.8	0.0359	0350	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
-1.7	0.0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
-1.6	0.055	054	053	052	0505	0495	0485	0475	0465	0455
-1.5	0.067	065	064	063	062	061	059	058	057	056
-1.4	0.081	079	078	076	075	074	072	071	069	068
-1.3	0.097	095	093	092	090	089	087	085	084	082
-1.2	0.115	113	111	109	107	106	104	102	100	098
-1.1	0.136	134	131	129	127	125	123	121	119	117
-1.0	0.159	156	154	152	149	147	145	142	140	138
-0.9	0.184	181	179	176	174	171	168	166	163	161
-0.8	0.212	209	206	203	200	198	195	192	189	187
-0.7	0.242	239	236	233	230	227	224	221	218	215
-0.6	0.274	271	268	264	261	258	255	251	248	245
-0.5	0.308	305	301	298	295	291	288	284	281	278
-0.4	0.345	341	337	334	330	326	323	319	316	312
-0.3	0.382	378	375	371	367	363	359	356	352	348
-0.2	0.421	417	413	409	405	401	397	394	390	386
-0.1	0.460	456	452	448	444	440	436	432	429	425
-0.0	0.500	496	492	488	484	480	476	472	468	464
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.500	504	508	512	516	520	524	528	532	536
0.1	0.540	544	548	552	556	560	564	568	571	575
0.2	0.579	583	587	591	595	599	603	606	610	614
0.3	0.618	622	625	629	633	637	641	644	648	652
0.4	0.655	659	663	666	670	674	677	681	684	688
0.5	0.692	695	699	702	705	709	712	716	719	722
0.6	0.726	729	732	736	739	742	745	749	752	755
0.7	0.758	761	764	767	770	773	776	779	782	785
0.8	0.788	791	794	797	800	802	805	809	811	813
0.9	0.816	819	821	824	826	829	832	834	837	839
1.0	0.841	844	846	848	851	853	855	858	860	862
1.1	0.864	866	869	871	873	875	877	879	881	883
1.2	0.885	887	889	891	893	894	896	898	900	902
1.3	0.903	905	907	908	910	911	913	915	916	918
1.4	0.919	921	922	924	925	926	928	929	931	932
1.5	0.933	935	936	937	938	939	941	942	943	944
1.6	0.945	946	947	948	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	0.9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	0.9641	9650	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	0.9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9762	9767
2.0	0.9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	0.9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	0.9861	9865	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	0.9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	0.9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	0.9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	0.9954	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	0.9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	0.9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	0.9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	0.9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9