אלי מיטב

בגרויות מתמטיקה - 481 - כיתה י - פתרונות מלאים

מספר מילים לפנֵי

ספר זה מכיל שאלות ממבחני הבגרות בין השנים 2004–2021, המתאימות לשאלונים 481 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. משרד החינוך פרסם המלצה לחלוקה חומר הלימוד לכיתות י–יא. ספר זה מכיל את החומר המתאים לכיתה י על בסיס המלצה זו (ולא בדיוק לפיה) ועל־פי המלצות מורים לכיתות י. המבחנים המקוריים של שאלונים אלו מופיעים בספרים של שאלונים אלו שיצאו בנפרד (48 מבחנים). השאלות מחולקות לפי נושאים ומובאות עם פתרון מלא. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לפרק, עם הפניה למספר העמוד (המספר המעובה משמאל לכל שאלה).

ספר במתכונת דומה לספר זה קיים גם לשאלון 581.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$ – לכל , $\in$ – שייך , $\nearrow$ – עליה , $\searrow$ – ירידה , $\cup$ – איחוד: היחס 'או' , $\emptyset$ – קבוצה ריקה

$\surd$ – אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. – מוחלט , ep. – נקודת קָצֶה (end point)

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'.
ככלל – סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בחינם.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי – בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת ל**שריף אמארה** מכפר זָלָפָּה ול**שרון חיים** מפתח תקוה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשפ"ב – 2022), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלְחְתִי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה אלי מיטב

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים **יָצאו לשאלונים** 582-581-482-481-382

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות **יָצאו לשאלונים** 582-581-482-481

גאומטריה אנליטית

נקודות וישרים - שאלות

1. (4 יח' , חורף תשמ"ט - 88) הישר שמשוואתו $y = 2x + 5$, חותך את ציר y בנקודה A.
הישר שמשוואתו $y = 2x - 5$, חותך את ציר y בנקודה C.
מנקודה A מורידים אנך לישר $y = 2x - 5$, החותך אותו בנקודה B.
מנקודה C מורידים אנך לישר $y = 2x + 5$, החותך אותו בנקודה D.
חשב את שטח המרובע $ABCD$. **(10)**

2. (4 יח' , קיץ תשמ"ט - 89) נתון משולש שקדקודיו הם: $C(5,3)$, $B(0,8)$, $A(0,0)$.
מצא את נקודת המפגש של הגובה היורד מ־A עם הגובה היורד מ־B. **(10)**

3. (4 יח' , קיץ תש"ן - 90) במקבילית $ABCD$ הצלע AB מונחת על הישר $x + y = 9$,
והצלע AD מונחת על הישר $y = \frac{1}{2}x + 6$. אלכסוני המקבילית נפגשים בנקודה $(1,5)$.
מצא את השיעורים של כל אחד מארבעת קדקודי המקבילית. **(10)**

4. (4 יח' , קיץ תשנ"א - 91) במשולש ישר־הזווית ABC ($\angle ABC = 90°$), נתון: $A(2,4)$, $B(10,8)$.
הקדקוד C נמצא על ציר x .
א. הראה כי המשולש ABC הוא משולש שווה־שוקיים.
ב. מצא נקודה D, כך שהמרובע $ABCD$ יהיה ריבוע. **(11)**

5. (4 יח' , חורף תשנ"ב - 91) ABC הוא משולש חד־זווית. שיעורי הנקודה B הם $(8,7)$.
הגובה לצלע AB חותך אותה בנקודה $D(2,4)$.
א. מצא את משוואת הגובה CD. **(11)**
ב. נתון גם שמשוואת הגובה לצלע BC היא $x + 3y = 9$. מצא את שיעורי הנקודות A ו־C.

מקור הביטוי 'עץ או פלי' הוא בתקופת השלטון הבריטי בארץ.
על צד אחד של מטבע בערך מִיל היה מצויר עץ ובצידו
האחר היה רשום 'פלשתינא (א"י)'.

תשובות

1. 40 (יחידות ריבועיות)

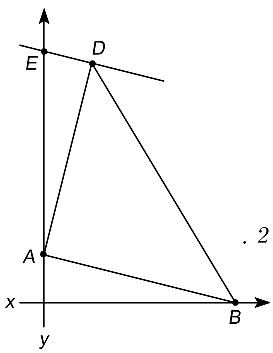
2. $(3,3)$

3. $A(2,7)$ $B(4,5)$ $C(0,3)$ $D(-2,5)$

4. **ב.** $D(6,-4)$

5. **א.** $y = -2x + 8$ **ב.** $A(0,3)$, $C(5,-2)$

28. (481 , קיץ תשפ"א - 2021 - מועד מיוחד)



בסרטוט מתואר משולש ABC. קדקוד A נמצא על ציר y.

קדקוד B נמצא על ציר x. משוואת הצלע AB היא $y=-\frac{1}{4}x+2$.

א. מצא את אורך הצלע AB .

נתון: $AB=AD$. קדקוד D נמצא ברביע הראשון ושיעור x שלו הוא 2 .

ב. **(1)** מצא את שיעור y של קדקוד D .

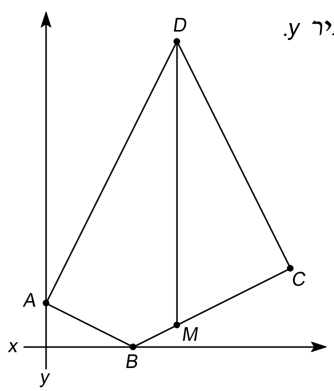
(2) הוכח כי $AD\perp AB$.

ג.-ד. לא בחומר של כיתה י. **(25)**

29. (481 , קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב)

הקדקוד A במרובע ABCD מונח על החלק החיובי של ציר y.

הקדקוד B מונח על ציר x.



הנקודה M נמצאת על הצלע BC כך שהישר DM מקביל לציר y.

שיעור x של הנקודה M הוא 6.

משוואת הצלע BC היא: $y=\frac{1}{2}x-2$.

א. מצא את שיעורי הנקודות B ו־ M.

נתון: $AB=2\cdot BM$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

נתון כי AD מאונך ל־AB.

ג. מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. לא בחומר של כיתה י. **(25)**

921 הספרות הראשונות של יחס הזהב; ϕ $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ מהוות מספר פלינדרומי ראשוני:

161, 803, 398, 874, 989, 484, 820, 458, 683, 436, 563, 811, 772, 030, 917

⋮

0, 141, 713, 513,**1**315, 317, 141, 0

⋮

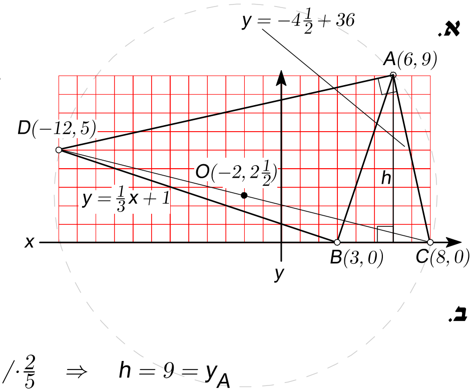
719, 030, 277, 118, 365, 634, 386, 854, 028, 484, 989, 478, 893, 308, 161

תשובות

28. **א.** $AB=\sqrt{68}$ **ב.** **(1)** $y_D=10$

29. **א.** $B(4,0)$, $M(6,1)$ **ב.** $A(0,2)$ **ג.** $D(6,14)$

26. א.



$\underline{C:}$ $y=0 \Rightarrow -4\frac{1}{2}x+36=0 \Rightarrow 4\frac{1}{2}x=36$

$\frac{9}{2}x=36 \ /\cdot\frac{2}{9} \Rightarrow x=8 \Rightarrow$ **C(8,0)**

$\underline{B:}$ $y=0$, $BC=5 \Rightarrow x_C-x_B=5$

$8-x_B=5 \Rightarrow x_B=3 \Rightarrow$ **B(3,0)**

ב.

$h=y_A$, $S_{\triangle ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}=22\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5h}{2}=\frac{45}{2} \ /\cdot\frac{2}{5} \Rightarrow h=9=y_A$

$-4\frac{1}{2}x+36=9 \Rightarrow \frac{9}{2}x=27 \ /\cdot\frac{2}{9} \Rightarrow x=6 \Rightarrow$ **A(6,9)**

ג.

$m_{AB}=\frac{9-0}{6-3}=3$, $BD\perp AB \Rightarrow m_{BD}=-\frac{1}{3}$

$B(3,0) \Rightarrow y-0=-\frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow \mathbf{y=-\frac{1}{3}x+1}$

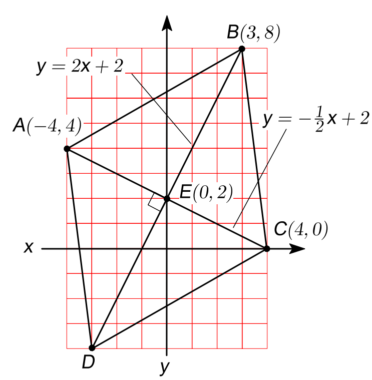
ד. (1)

$x_D=-12 \Rightarrow y_D=-\frac{1}{3}\cdot(-12)+1=5 \Rightarrow D(-12,5) \Rightarrow m_{AD}=\frac{9-5}{6-(-12)}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$

$m_{AC}=-4\frac{1}{2}=-\frac{9}{2} \Rightarrow m_{AD}\cdot m_{AC}=\frac{2}{9}\cdot(-\frac{9}{2})=-1 \Rightarrow$ **$AD\perp AC$ (√)**

---

27. א. (1)



$\underline{AC:}$ $AC\perp BD$, $m_{BD}=2 \Rightarrow m_{AC}=-\frac{1}{2}$

$C(4,0) \Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}(x-4)$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$

$\underline{E:}$ $x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot 0+2=2$

$\Rightarrow$ **E (0,2)**

(2)

$\underline{BD:}$ $m=2$, $E(0,2) \Rightarrow y-2=2(x-0)$

$\Rightarrow \mathbf{y=2x+2}$

ב. (1)

$S_{\triangle}=\frac{BE\cdot EC}{2}=\frac{BE\cdot\sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2}}{2}=\frac{BE\cdot\sqrt{20}}{2}=\frac{BE\cdot\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}}=\underset{\text{נתון}}{15} \Rightarrow BE=\frac{15}{\sqrt{5}}$ (יחידות אורך)

(2)

$B(k,2k+2)$ $BE=\sqrt{(k-0)^2+(2k+2-2)^2}=\sqrt{k^2+4k^2}=\sqrt{5k^2}=k\sqrt{5}=\frac{15}{\sqrt{5}} \ /:\sqrt{5}$

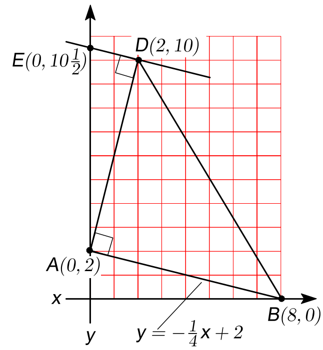
$\Rightarrow k=\frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{15}{5} \Rightarrow k=3 \Rightarrow 2k+2=8 \Rightarrow$ **B (3,8)**

28. א.

$x_A = 0 \quad \Rightarrow \quad y_A = -\frac{1}{4}\cdot 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad A(0,2)$

$y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad B(8,0)$

$AB = \sqrt{(0-8)^2 + (2-0)^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB = \sqrt{68}}$ **(י"א)**



ב. (1)

$D(2,y) \quad \Rightarrow \quad AD = \sqrt{(0-2)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{68} = AB$

$\Rightarrow \quad 4 + (2-y)^2 = 68 \quad \Rightarrow \quad (2-y)^2 = 64$

$\Rightarrow \quad (2-y)_{1,2} = \pm 8 \;, \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y_D = 10}$

(2)

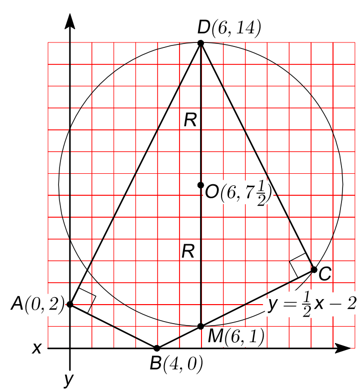
$m_{AD} = \frac{10-2}{2-0} = 4 \;, \quad m_{AB} = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m_{AD}\cdot m_{AB} = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AD \perp AB} \; (\checkmark)$

---

29. א.

<u>B:</u> $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B(4,0)}$

<u>M:</u> $x = 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\cdot 6 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(6,1)}$



ב.

$BM = \sqrt{(4-6)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$

$A(0,p) \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{(0-4)^2 + (p-0)^2} = \sqrt{16 + p^2}$

$AB = 2\,BM \quad \Rightarrow \quad \sqrt{16+p^2} = 2\sqrt{5} \quad /(\;)^2$

$16 + p^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 2$

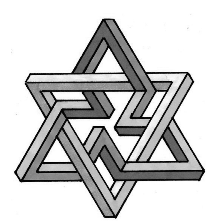
$p > 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A(0,2)}$

ג.

$m_{AB} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2} \;, \quad AD \perp AB \quad \Rightarrow \quad m_{AD} = 2$

$x_D = x_M = 6 \quad \Rightarrow \quad D(6,q) \quad \Rightarrow \quad m_{AD} = \frac{q-2}{6-0} = 2$

$\Rightarrow \quad q - 2 = 12 \quad \Rightarrow \quad q = 14 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D(6,14)}$

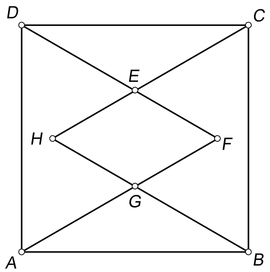


חלק ממשפט שהופיע בסיפור ***שלושה ימים וילד***, של הסופר ***א.ב. יהושע***:

"אבל אני כבר עמדתי . . . ליד לוח עמוס משוואות ריבועיות ממעלה ראשונה . . . "

גאומטריה אוקלידית

א - ללא פרופורציה וללא מעגל - שאלות



1. (005 , קיץ ס"ז - 2007 , מועד ב)

על צלעות הריבוע ABCD בנו משולשים שווי־צלעות - AFD ו־ BHC.

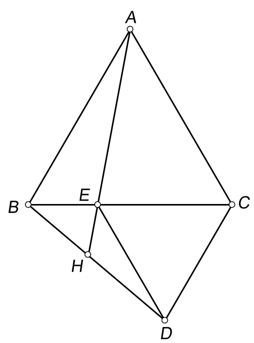
הצלעות CH ו־ DF נחתכות בנקודה E ,

והצלעות BH ו־ AF נחתכות בנקודה G.

אורך צלע הריבוע הוא 6_{cm}.

א. הוכח כי המרובע HEFG הוא מעוין.

ב. חשב את אורך הגובה לצלע AB במשולש ABG. **(32)**



2. (005 , חורף ס"ח - 2008)

נתון משולש שווה־צלעות ABC.

E היא נקודה על הצלע BC.

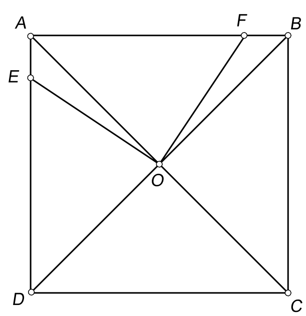
על הקטע EC בנו משולש שווה־צלעות ECD.

המשך AE חותך את BD בנקודה H.

הוכח: **א.** $\triangle AEC \cong \triangle BDC$

ב. $\angle EAC = \angle HED$

ג. אם $HE = HD$ אז $AE \perp BC$ **(33)**



3. (005 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד לוחמים)

מרובע ABCD הוא ריבוע.

הנקודה O היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

הנקודה F נמצאת על הצלע AB,

והנקודה E נמצאת על הצלע AD. $FO \perp EO$.

א. הוכח: $\triangle AOE \cong \triangle BOF$.

ב. נתון גם: $FB = 1.5_{cm}$, $S_{ABCD} = 81_{cm^2}$.

(1) מצא את היחס בין שטח המשולש BOF לשטח המשולש AOB.

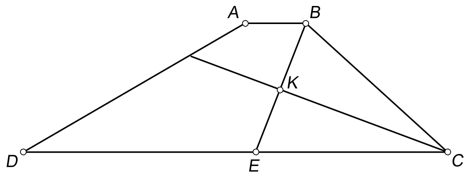
(2) חשב את שטח המשולש BOF. **(34)**

$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$ **המספר הקטן ביותר בחזקת 4 ששווה לסכום 5 מספרים בחזקת 4**

תשובות

1. ב. $h = \sqrt{3}_{cm}$ **2. א.** $\angle ABC = 135^{o}$ **3. ב. (1)** $\frac{1}{6}$ **(2)** $3\frac{3}{8}_{cm^2}$

.4 (005 , חורף ס״ט - 2009)



בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) חוצה־זווית ABC

חותך את חוצה־זווית BCD

בנקודה K , ואת הבסיס DC בנקודה E .

א. הוכח כי $\angle BKC = 90^\circ$.

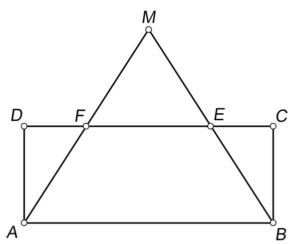
ב. דרך הנקודה K מעבירים מקביל לבסיסי הטרפז.

הוכח כי המקביל הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.

ג. נתון: $BC = 6_{cm}$, $AB = 2_{cm}$, $DE = 8_{cm}$.

חשב את האורך של קטע האמצעים בטרפז ABCD . נמק. **(35)**

.5 (005 , קיץ ס״ט - 2009 , מועד א)



על הצלע AB של המלבן ABCD

בנו משולש שווה־שוקיים AMB ($AM = BM$).

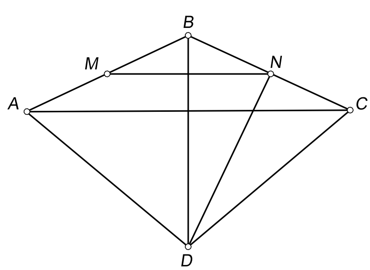
MA ו־ MB חותכים את DC בנקודות F ו־ E בהתאמה.

EF הוא קטע אמצעים במשולש AMB.

א. הוכח כי $DF = EC$.

ב. הוכח כי היחס בין שטח המשולש ADE לשטח הטרפז ABCE הוא $3:5$. **(36)**

.6 (005 , קיץ ס״ט - 2009 , מועד ב)



נקודה D נמצאת מחוץ למשולש ABC ($\angle ABC > 90^\circ$)

כך ש־ $AD = BD = CD$.

נקודה N מונחת על הצלע BC כך ש־ $ND \perp BC$.

נקודה M היא אמצע הצלע AB .

א. הוכח: $MN \parallel AC$.

ב. נתון גם כי $BD \perp AC$. הוכח כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

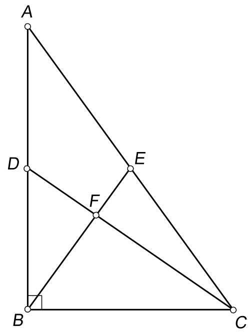
ג. BD ו־ AC נחתכים בנקודה K .

נתון: $AB = 8_{cm}$. חשב את אורך הקטע MK . נמק. **(36)**

מאורעות נדירים שומרים לעצמם את הזכות להתרחש   *(מרטין גרדנר)*

תשובות

.4 ג. 8_{cm} **.6 ג.** $MK = 4_{cm}$



7. (005 , סתיו תש"ע - 2009 , מועד לוחמים)

משולש ABC הוא משולש ישר־זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

BE הוא תיכון לצלע AC , ו־ CD הוא תיכון לצלע AB .

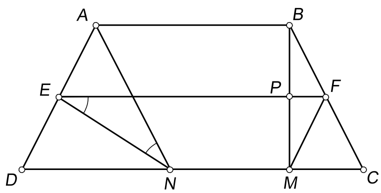
התיכונים BE ו־ CD נחתכים בנקודה F .

א. חשב את היחס $\frac{FB}{AC}$.

ב. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC להיקף המשולש EFD .

ג. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC ,

והנקודה N היא אמצע הקטע FB . הוכח כי המרובע $DEMN$ הוא מקבילית. **(37)**



8. (005 , אביב ס"ח - 2008 , לוחמים)

בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ E , F , M ו־ N

נקודות על צלעות הטרפז.

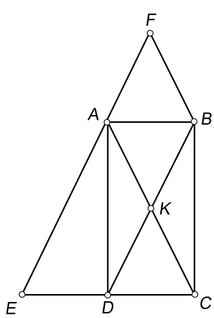
BM חותך את EF בנקודה P .

$\angle ANE = \angle FEN$, $BF = FC = MF$, $BP \perp EF$.

הוכח: **א.** $\angle BMC = 90^\circ$

ב. $NA = ND$

ג. אם $\angle ANM$ $\angle BAN = \frac{1}{2}$ אז $ED = \frac{1}{2}DN$ **(37)**



9. (804 , קיץ ס"ט - 2009 , מועד א)

אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה K .

דרך הקדקודים A ו־ B העבירו ישרים המקבילים לאלכסוני המלבן.

הישרים המקבילים נפגשים בנקודה F .

המקביל דרך קדקוד A נפגש עם המשך הצלע DC בנקודה E .

א. הוכח כי $ED = DC$.

ב. הוכח כי המרובע $FBKA$ הוא מעוין. **(38)**

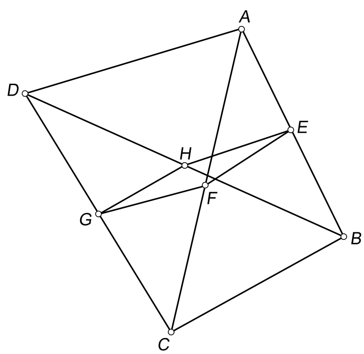
ג. נתון: $AE = 12cm$. חשב את היקף המעוין $FBKA$.

המילה 'שלום' מופיעה בפעם הראשונה בבראשית בברית בין הבתרים (בראשית ט"ו ט"ו).
פסוק זה הוא הפסוק ה־376 בתורה. מספר זה הוא בדיוק הערך הגימטרי של המילה 'שלום'.

תשובות

7. א. $\frac{FB}{AC} = \frac{1}{3}$ **ב.** 2 **9. ג.** $24cm$

10. (804 , קיץ תשע"ב - 2012 , מועד א)



במרובע ABCD נקודה E היא אמצע הצלע AB ,

ונקודה G היא אמצע הצלע DC .

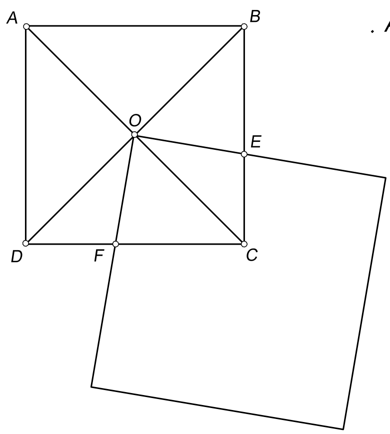
נקודה F היא אמצע האלכסון AC ,

ונקודה H היא אמצע האלכסון DB .

הוכח: **א.** $EF \parallel HG$.

ב. $\triangle EHG \cong \triangle EFG$. **(38)**

11. (005 , קיץ תשע"ב - 2012 , מועד א) נתון ריבוע ABCD .



אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O .

בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר.

שתי צלעות סמוכות של הריבוע האחר חותכות את

הצלעות BC ו־ DC בנקודות E ו־ F בהתאמה.

א. הוכח כי $\triangle OEC \cong \triangle OFD$.

ב. נתון כי שטח הריבוע ABCD הוא 100 סמ"ר.

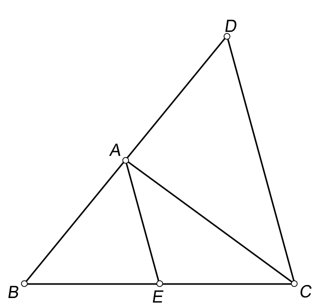
חשב את שטח המרובע OFCE . **(39)**

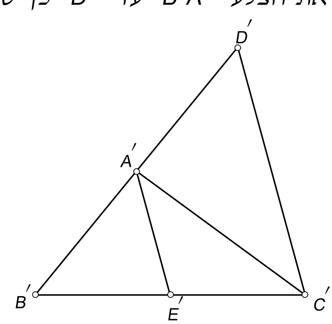
12. (804 , קיץ ע"א - 2011 , מועד ב)

AE הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC . $A'E'$ הוא תיכון לצלע $B'C'$ במשולש $A'B'C'$.

$AE = A'E'$, $AC = A'C'$, $BA = B'A'$. המשיכו את הצלע BA עד D כך ש־ $BA = AD$,

והמשיכו את הצלע $B'A'$ עד D' כך ש־ $B'A' = A'D'$.





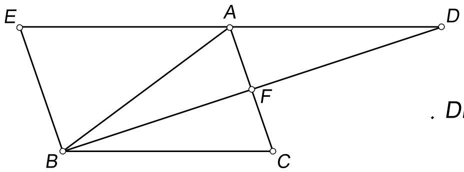
א. נמק מדוע $AE \parallel DC$. **ב.** הוכח: $\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$. **ג.** הוכח: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

(39)

תשובות

11. **ב.** $S_{OFCE} = 25$ (סמ"ר)

13. (005 , חורף תשע"ג - 2013)



BF הוא תיכון לצלע AC במשולש ABC .

נקודה D נמצאת על המשך BF כך ש־ $DF = FB$.

א. הוכח כי המרובע $ADCB$ הוא מקבילית

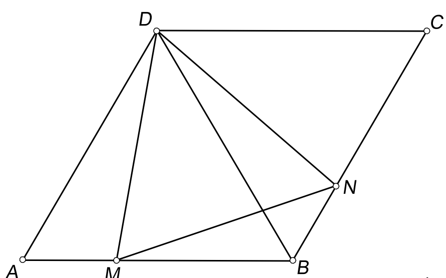
ב. נקודה E נמצאת על המשך DA , כך ש־ $DA = AE$.

הוכח כי CE חוצה את הצלע AB . **(40)**

ג. נתון גם כי $EB \perp BD$. הוכח כי המשולש ABC הוא שווה־שוקיים.

ד. מצא את גודל $\angle ADF$, אם נתון כי $\triangle ABC$ הוא שווה־צלעות.

14. (804 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד ב)



הזווית החדה במעוין $ABCD$ היא בת 60° .

נקודה M נמצאת על הצלע AB ,

ונקודה N נמצאת על הצלע BC

כך ש־ $AM = BN$.

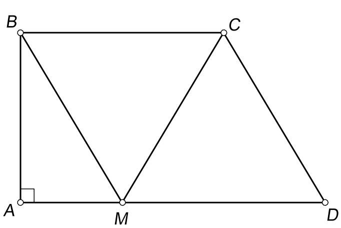
א. הוכח: $\triangle MDB \cong \triangle NDC$. **(41)**

ב. הוכח: $\triangle ADM \cong \triangle BDN$.

ג. שטח המרובע $DMBN$ הוא S . הבע באמצעות S את שטח המעוין $ABCD$.

15. (005 , חורף תשע"ע - 2010 , מועד לוחמים)

נתון טרפז ישר־זווית $ABCD$ $(BC \parallel AD ,\ \angle BAD = 90^\circ)$.



M נקודה על AD כך שמשולש BCM הוא שווה־צלעות.

א. $AM = 2a$.

הבע באמצעות a את אורך הקטע BM .

ב. EF הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$

(E על AB , ו־ F על CD) .

נתון: $\frac{EF}{AD} = \frac{5}{6}$. מצא את גודל הזווית CDM . **(42)**

המספר הראשוני 3413 ניתן להצגה הבאה: $3413 = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$

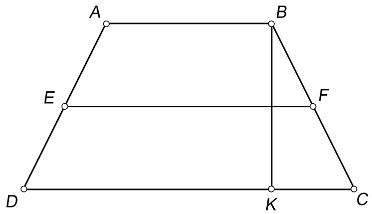
תשובות

13. **ד.** $\angle ADF = 30^\circ$

14. **ג.** $S_{ABCD} = 2S$ (יחידות ריבועיות)

15. **א.** $BM = 4a$ (י"א) **ב.** $\angle CDM = 60^\circ$

16. (005, חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)



בטרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$,

BK הוא גובה לבסיס DC.

EF הוא קטע אמצעים.

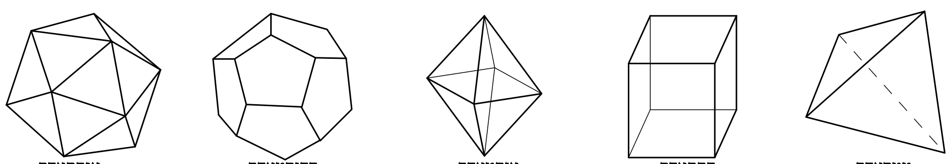
א. הוכח כי המשולש KFC הוא שווה־שוקיים.

ב. הוכח כי המרובע $EFKD$ הוא מקבילית.

ג. נתון: $DC = 2\,AB$. **(43)**

חשב את היחס בין שטח המרובע $ABFE$ לבין שטח המרובע $EFCD$.

קיימים רק חמישה גופים מרחביים משוכללים. הגופים קרויים בלועזית על שם מספר הפאות שלהם. חלקו הראשון של השם הוא מספר הפאות ביוונית, וחלקו השני של השם הוא 'אדר' - פאה.



טטראדר הקסאדר אוקטאדר דודקטאדר איקסאדר

שם	פאות	קודקודים	מקצועות	תאור
טטראדר (ארבעון)	4	4	6	פירמידה ישרה, משולשת ומשוכללת
הקסאדר	6	8	12	קוביה
אוקטאדר (תמנון)	8	6	12	שתי פירמידות ישרות מרובעות ומשוכללות המחוברות בבסין
דודקטאדר (תריסריון)	12	20	30	פאות מחומשות משוכללות. כל שלוש פאות נפגשות בקודקוד אחד
איקסאדר (עשירמון)	20	12	30	פאות משולשות משוכללות. כל חמש פאות נפגשות בקודקוד אחד

משפט הפאונים של אוילר: סכום מספר הקודקודים ומספר הפאות גדול ב־2 ממספר המקצועות, בכל פאון קמור.

בנוסחה: V - מספר הקודקודים ; F - מספר הפאות ; E - מספר המקצועות ⇐ $V + F - E = 2$

תשמעו סיפור: שאלה שנשאלה במבחן הפסיכומטרי האמריקאי (.S.A.T): נתונים טטראדר ואוקטאדר בעלי פאות חופפות. הדביקו פאה לפאה והתקבל גוף חדש. כמה פאות לגוף החדש? התשובה המיידית שכמעט כל הנבחנים ענו היא 10 פאות: לטטראדר 4 פאות ; לאוקטאדר 8 פאות ; שתי פאות 'התבזבזו' על ההדבקה ⇐ נשארו 10 פאות. אחד התלמידים חשב שאם שאלה זו הופיעה בין השאלות האחרונות - לא יתכן שהתשובה עליה כה פשוטה. הוא התעמק בבעיה וענה: 7 פאות! התלמיד קיבל במבחן ציון 99. כשבירר היכן טעה, נענה כי היה זה בשאלה זו. התלמיד התעקש שתשובתו נכונה, והבוחנים דחו את ערעורו. גם אביו של התלמיד, שהיה מדען בעצמו, טען לצדקת הבוחנים. התלמיד בנה מודל של הגופים והוכיח את צדקתו. העניין הגיע עד לבית המשפט שפסק כי התלמיד צודק. הבוחנים נאלצו להוסיף לו את הנקודה החסרה, אך הורידו נקודה אחת לכל שאר הנבחנים . . .

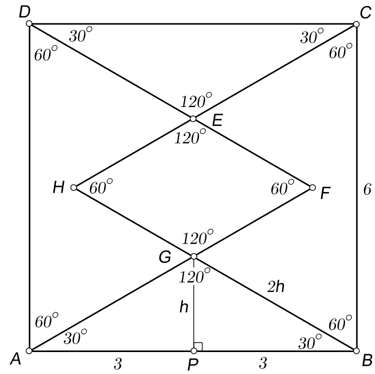
טוב, אז איך זה בכל זאת יכול להיות? התשובה היא כי שתי פאות באמת נגרעו מההדבקה. כל אחת משלושת הפאות האחרות של הטטראדר התלכדה עם אחת מפאות האוקטאדר, כך שיש להפחית שלוש פאות מתוך ה־10 שנשארו.

תשובות

16. ג. $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{5}{7}$

גאומטריה אוקלידית - א - ללא פרופורציה וללא מעגל - פתרונות

1. א.



(1) $\angle FAD = \angle HBC = \angle DFA = \angle CHB = 60^\circ$

(2) $\angle GAB = \angle GBA = \angle ECD = \angle EDC = 30^\circ$

(3) $\angle AGB = 120^\circ \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \angle HGF = 120^\circ$

(3) $\angle CED = 120^\circ \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \angle HEF = 120^\circ$

$\Rightarrow^{(5)}$ EFGH מקבילית

(6) $AF = BH$, (7) $GA = GB$

$\Rightarrow^{(8)} \quad AF - GA = BH - GB \quad \Rightarrow \quad GH = GF$

(9) $HG = EF$, $EH = FG \quad \Rightarrow \quad EF = FG = GH = HE \quad \Rightarrow^{(10)}$ **EFGH מעוין** (✓)

ב.

$GP \perp AB \quad \Rightarrow^{(11)} \quad AP = PB = \frac{6}{2} = 3_{cm}$

(12) $\angle GBP = 30^\circ \quad \Rightarrow^{(13)} \quad GP = \frac{1}{2}\ GB \quad \Rightarrow^{(14)} \quad GP = h\ ,\ GB = 2h$

<u>$\triangle GPB$:</u> (15) $h^2 + 3^2 = (2h)^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 + 9 = 4h^2$

$\Rightarrow \quad 3h^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 3 \quad \Rightarrow^{(16)}$ $\mathbf{h = \sqrt{3}_{cm}}$

---

(1) זווית במשולש שווה־צלעות היא בת 60°

(2) השלמה ל־ 90° של זווית ריבוע

(3) השלמה ל־ 180° במשולש (4) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(5) מרובע שכל זוג זוויות נגדיות שלו שוות זו לזו - הוא מקבילית

(6) צלעות ריבוע שוות זו לזו, ונתון: משולשים שווי־צלעות

(7) משולש ששתים מזוויותיו שוות זו לזו הוא משולש שווה־שוקים

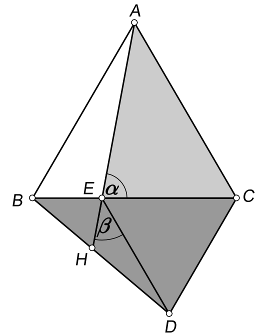
(8) הפרש של גדלים שווים (9) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

(10) הגדרת המעוין (11) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקים (GAB) הוא גם תיכון

(12) סעיף א' (13) במשולש ישר־זווית: הניצב שמול זווית חדה בת 30°, שווה למחצית היתר

(14) סימון (15) משפט פיתגורס (16) $h > 0$ כי הוא אורך

2. א.



(1) $AC = BC$, (2) $\angle ACB = \angle BCD = 60^\circ$

(1) $EC = CD \overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\triangle AEC \cong \triangle BDC$ (✓)

ב.

(4) $\angle AEC = \alpha \overset{(5)}{\Rightarrow} \angle EAC = \underline{120^\circ - \alpha}$

(6) $\angle CEH = 180^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle HED = 180^\circ - \alpha - \angle CED = 180^\circ - \alpha - 60^\circ$

$\angle HED = \underline{120^\circ - \alpha} \Rightarrow$ $\angle EAC = \angle HED$ (✓)

ג.

(1) $HE = HD \overset{(7)}{\Rightarrow} \angle HED = \angle EDH \overset{(4)}{=} \beta \Rightarrow \underline{\angle BDC = 60^\circ + \beta}$

$\angle AEC = 180^\circ - \angle CED - \angle HED = 180^\circ - 60^\circ - \beta \Rightarrow \underline{\angle AEC = 120^\circ - \beta}$

(8) $\angle BDC = \angle AEC \Rightarrow 60^\circ + \beta = 120^\circ - \beta \Rightarrow 60^\circ = 2\beta \Rightarrow \beta = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle HEC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow$ $AE \perp BC$ (✓)

---

(1) נתון (2) זווית במשולש שווה־צלעות ($\triangle ADF$) היא בת 60° (3) מ.ח. צ.ז.צ.

(4) סימון (5) השלמה ל־ 180° במשולש ($\triangle AEC$) (6) השלמה ל־ 180° בזוויות צמודות

(7) זוויות בבסיס במש״ש שוות זו לזו

(8) זוויות מתאימות במשולשים חופפים לפי החפיפה של סעיף א׳

חרדת המספרים

לאונרד אוילר היה מתמטיקאי שוויצי (1707-1783), פורה ביותר. אוילר האמין בקיומו של א-לוקים.

בתקופתו פעל גם פילוסוף צרפתי בשם **דֶני דידרו**. דידרו היה אתיאיסט (כופר בקיומו של א־לוקים).

בתקופה מסוימת בחייהם פעלו שניהם ברוסיה בתקופתה של **קטרינה הגדולה**.

דני דידרו ניסה אז לשכנע את הרוסים לנטוש את אמונתם ולהפוך לאתיאיסטים.

קטרינה, שלא אהבה את פעילותו של דידרו, הזמינה לחצרה בפטרסבורג, את אוילר ואת דידרו לוויכוח תיאולוגי.

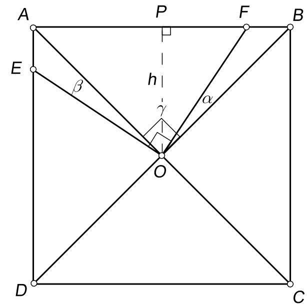
לדידרו לא היה מושג ולו הקלוש ביותר, במתמטיקה. אוילר החליט לנצל עובדה זו בויכוח.

הוא פנה לדידרו: "יש בידי הוכחה מתמטית לקיומו של הא-ל,

וההוכחה היא: $\frac{a+b^n}{n} = x$ מסקנה: יש א־לוקים. מה יש לך להגיד על כך?"

דידרו, שלא ידע בכלל איך להסתכל על זה, נותר פעור־פה ולא ידע מה תשובה ישיב ל'הוכחה' זו. המום ומושפל, לקול צחוקם של כל הנוכחים במעמד, נטש את המפגש, עזב את פטרסבורג וחזר לפריז. סיפור אמיתי.

3. א.



(1) $\underline{AO = BO}$, (2) $\underline{\angle OAE = \angle OBF} = 45^{\circ}$

(3) $\angle BOF = \alpha$, $\angle AOE = \beta$, $\angle AOF = \gamma$

(4) $AO \perp BO$, (5) $EO \perp FO$

$\Rightarrow \quad \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 90^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = \beta}$

$\Rightarrow^{(6)} \quad \triangle AOE \cong \triangle BOF$ (√)

ב. (1) בניית עזר: $h = OP \perp AB$

$S_{ABCD} = 81_{cm^2} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{81} = 9_{cm}$

(7) $\dfrac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle AOB}} = \dfrac{\frac{1.5\ h}{2}}{\frac{9\ h}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\dfrac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle AOB}} = \dfrac{1}{6}}$

(2)

(8) $h = OP = \frac{9}{2} = 4.5 \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle BOF} = \frac{1.5 \cdot 4.5}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle BOF} = 3\frac{3}{8}\ _{cm^2}}$

---

(1) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה

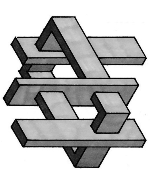
(2) אלכסוני ריבוע חוצים את זוויותיו

(3) סימון (4) אלכסוני ריבוע מאונכים זה לזה

(5) נתון (6) משפט חפיפה ז-צ-ז

(7) לשני המשולשים BOF ו־ AOB גובה משותף לבסיסים FB ו־ AB בהתאמה

(8) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית (△AOB) שווה למחצית היתר



בעיית אתגר – מה שאפס יכול לעשות

א. איך ניתן לקבל את המספר 6 משלושה אפסים בעזרת כל כלי מתמטי חוקי ?

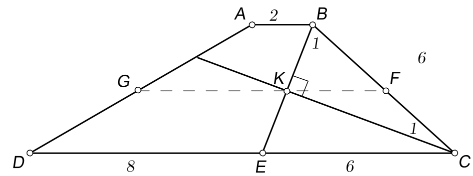
<u>שים לב:</u> אין מדובר ב'טריק' מתחכם, כמו לחתוך במספריים חלק מ־ 0

ולהדביק אותו לחלק אחר . . . הפתרון הוא בכלים של מתמטיקה אמיתית!

זו עוד היתה השאלה הקלה. הנה **ה**שאלה:

ב. כיצד ניתן להגיע למספר 6 עם אפס אחד בלבד ! (יש לפחות ארבע דרכים שונות).

4. א.



$(1)\quad \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$

$(2)\quad \angle B_1 = \frac{\angle ABC}{2}$

$\angle C_1 = \frac{\angle BCD}{2}$

$\Rightarrow \quad \angle B_1 + \angle C_1 = \frac{\angle ABC + \angle BCD}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\underline{\triangle BKC:}\quad (3)\quad \angle BKC = 180^\circ - (\angle B_1 + \angle C_1) = 180^\circ - 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\angle BKC = 90^\circ} \quad (\checkmark)$

ב.

$\underline{\triangle CBE:}\quad (4)\quad CK \perp BE \quad , \quad (2)\quad \angle C_1 = \angle C_2 \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad CE = CB \quad \overset{(6)}{\Rightarrow} \quad BK = KE$

$(2)\quad KF \parallel EC \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{BF = FC} \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{AG = GD} \quad (\checkmark)$

ג.

$(5)\quad CE = CB \overset{(2)}{=} 6 \quad , \quad (9)\quad GF = \frac{AB + DC}{2} = \frac{2+(8+6)}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{GF = 8_{cm}}$

---

(1) סכום זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים (2) נתון

(3) השלמה ל- 180° במשולש (4) מסעיף א׳

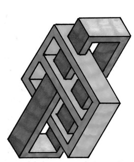
(5) משולש שחוצה זווית שלו הוא גם גובה - הוא משולש שווה-שוקיים

(6) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון

(7) קו במשולש המחבר אמצע צלע אחת עם צלע שניה ומקביל לשלישית - הוא קטע אמצעים

(8) קטע בטרפז המחבר אמצע שוק אחת עם השוק האחרת ומקביל לבסיסים - הוא קטע אמצעים

(9) קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסיו



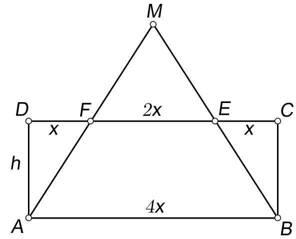
המספר $142,857$ **הוא מספר מיוחד במינו. כאשר כופלים אותו ב-**2, 3, 4, 5 **ו-**6,
המכפלה תהיה מורכבת מהספרות מהן הוא מורכב, רק בסדר שונה:

$142857 \times 3 = 4\,2\,8\,5\,7\,1$
$142857 \times 2 = 2\,8\,5\,7\,1\,4$
$142857 \times 6 = 8\,5\,7\,1\,4\,2$
$142857 \times 4 = 5\,7\,1\,4\,2\,8$
$142857 \times 5 = 7\,1\,4\,2\,8\,5$

ועוד דבר: השבר $\frac{1}{7}$ **הוא מחזורי מימין לנקודה העשרונית, עם אותן ספרות:** 142857

$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857142857142857142857\ldots$

5. א.



$(1)\ \ AD=BC\ \ ,\ \ (2)\ \ \angle D=\angle C=90^{\circ}$

$(3)\ \ AM=BM\ \ \Rightarrow^{(4)}\ \ AF=BE$

$(5)\ \ AF>AD\ ,\ BE>BC\ \ \Rightarrow^{(6)}\ \ \triangle FDA\cong\triangle ECB$

$(7)\ \ \mathbf{DF=EC}\ \ (\checkmark)$

ב. נסמן: $AD=h$.

$(8)\ \ EF=2x\ \ \Rightarrow^{(9)}\ \ AB=4x=^{(1)}\ DC\ \ \Rightarrow\ \ DF+EC=DC-FE=4x-2x=2x$

$(10)\ \ DF=EC=\frac{2x}{2}=x\ \ \Rightarrow\ \ \frac{S_{ADE}}{S_{ABCE}}=\frac{\frac{DE\cdot\cancel{h}}{\cancel{2}}}{\frac{(EC+AB)\cdot\cancel{h}}{\cancel{2}}}=\frac{x+2x}{x+4x}=\frac{3x}{5x}\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{\frac{S_{ADE}}{S_{ABCE}}=\frac{3}{5}}\ \ (\checkmark)$

---

(1) צלעות נגדיות במלבן שוות זו לזו (2) זווית במלבן היא זווית ישרה (3) נתון

(4) הגדרת FE כקטע אמצעים במשולש (נתון) - אם השלמים שווים אז גם החצאים שווים

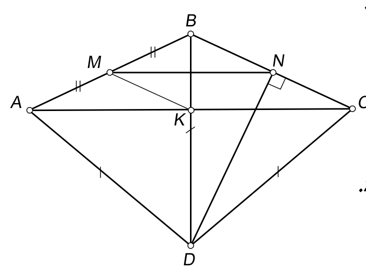
(5) יתר במשולש ישר־זווית גדול מכל אחד מניצביו (6) משפט חפיפה צלע־צלע־זווית

(7) צמב״ח (8) סימון (9) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית

(10) הוכח בסעיף א׳

---

6. א.



$(1)\ \ DC=DB\ ,\ ND\perp BC\ \ \Rightarrow^{(2)}\ \ NB=NC$

$NB=NC\ ,\ (1)\ AM=MB\ \ \Rightarrow^{(3)}\ \ \mathbf{MN\parallel AC}\ \ (\checkmark)$

ב.

$\underline{\triangle ADC:}\ \ (1)\ \ DA=DC\ ,\ DK\perp AC\ \ \Rightarrow^{(2)}\ \ KA=KC$

$\Rightarrow^{(4)}\ \ \underline{\triangle BAC:}\ \ \mathbf{BA=BC}\ \ (\checkmark)$

ג.

$\underline{\triangle BKA:}\ \ (1)\ \ AM=MB\ ,\ BK\perp KA\ \ \Rightarrow^{(5)}\ \ KM=\frac{1}{2}\ AB=\frac{1}{2}\cdot 8\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{KM=4_{cm}}$

---

(1) נתון (2) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון

(3) קטע אמצעים (MN) במשולש מקביל לצלע השלישית

(4) משולש שבו גובה לבסיס הוא גם תיכון הוא משולש שווה־שוקיים

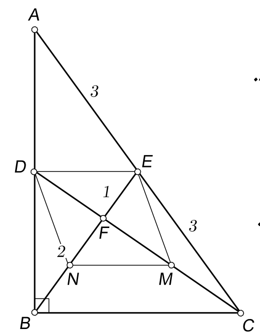
(5) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר

את המספר הראשוני 7129 ניתן להציג תוך שימוש בכל הספרות פעם אחת בלבד: $7129=5^0+6^1+7^2+8^3+9^4$

7. א. נקבע, ללא הגבלת הכלליות: $FE = 1$ (יחידת אורך אחת).

$FE = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} BF = 2 \Rightarrow BE = 2 + 1 = 3 \overset{(2)}{\Rightarrow} AE = EC = 3$

$AC = 3 + 3 = 6 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{FB}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$



ב.

$(3)\ BC = 2\,DE\ ,\ (1)\ BF = 2\,FE\ ,\ CF = 2\,FD$

$\Rightarrow BC + BF + CF = 2(DE + FE + FD) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{BC+BF+CF}{DE+FE+FD} = 2}$

ג.

$\underline{\triangle FBC:}\ (3)\ MN = \frac{1}{2}\,BC\ ,\ MN \parallel BC$

$\underline{\triangle ABC:}\ (3)\ DE = \frac{1}{2}\,BC\ ,\ DE \parallel BC$

$\Rightarrow MN = DE\ ,\ MN \parallel DE \overset{(4)}{\Rightarrow}$ **DEMN מקבילית** (✓)

- -

(1) נקודת המפגש של התיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של $2 : 1$ (2 קרוב לקדקוד)

(2) התיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר

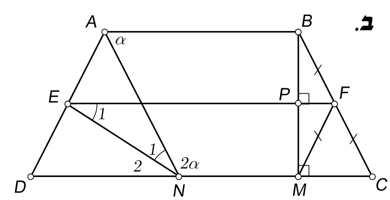
(3) DE קטע אמצעים במשולש. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה

(4) מרובע ששתי צלעות נגדיות בו שוות זו לזו ומקבילות זו לזו - הוא מקבילית

---

8. א. $\underline{\triangle BMC:}\ (1)\ BF = FC = MF \Rightarrow MF = \frac{1}{2}\,BC \overset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\angle BMC = 90^\circ}$ (✓)

ב.



$(3)\ \angle BPF = \angle BMC \overset{(4)}{\Rightarrow} EF \parallel DC \overset{(5)}{\Rightarrow} AE = ED$

$(1)\ \angle E_1 = \angle N_1\ ,\ (6)\ \angle E_1 = \angle N_2 \Rightarrow \angle N_1 = \angle N_2$

$\underline{\triangle AND:}\ (7)\ \boldsymbol{AN = ND}$ (✓)

ג.

$(8)\ \angle BAN = \alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} \angle ANM = 2\alpha \overset{(9)}{\Rightarrow} 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \angle ANC = 2\alpha = 120^\circ$

$(10)\ \angle AND = 60^\circ \overset{(11)}{\Rightarrow} \angle ANE = \angle DNE = 30^\circ\ ,\ (12)\ \angle NED = 90^\circ \overset{(13)}{\Rightarrow} \boldsymbol{ED = \frac{1}{2}\,DN}$ (✓)

- -

(1) נתון (2) אם תיכון שווה למחצית הצלע הנחצית, אז המשולש הוא ישר־זווית (3) מסעיף א

(4) אם זוויות מתאימות שוות בישרים נחתכים - הישרים מקבילים

(5) EF קטע אמצעים: חוצה את BC ומקביל לבסיסים (6) זוויות מתחלפות במקבילים נחתכים

(7) משולש שבו התיכון הוא גם חוצה־זווית הוא משולש שווה־שוקיים (8) סימון

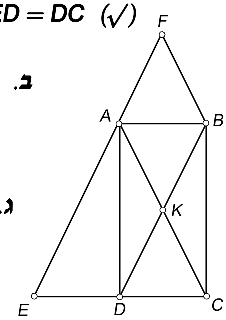
(9) סכום חד־צדדיות במקבילים נחתכים ע״י ישר שלישי (10) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה

(11) NE חוצה זווית ב־ $\triangle AND$ (12) תיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה

(13) במשולש ישר־זווית - הניצב מול זווית בת 30° שווה למחצית היתר

9. **א.**

$(12)\ AK = KC\ ,\ (1)\ DK \parallel AE \Rightarrow$ DK קטע אמצעים ב־ $\triangle ACE \Rightarrow$ $\mathbf{ED = DC}\ (\checkmark)$



ב.

FBKA מקבילית , $(12)\ AK = KB \overset{(13)}{\Rightarrow}$ **FBKA מעוין** $(\checkmark)$

ג.

$AE = 12_{cm} \overset{(14)}{\Rightarrow} BD = 12 \overset{(12)}{\Rightarrow} KB = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow BK + KA + AF + FB = 4 \cdot 6 = \mathbf{24_{cm}}$

---

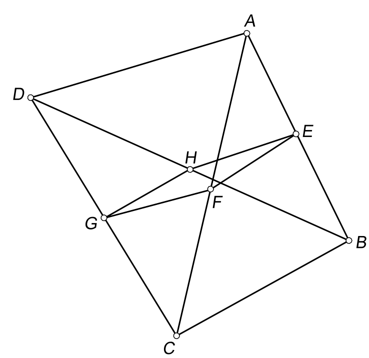
(1) אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה (2) נתון

(3) מקבילית ששתי צלעות סמוכות שלה שוות זו לזו - היא מעוין

(4) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

---

10. **א.**



$\underline{\triangle ABC:}\ (1)\ EF \parallel BC$

$\underline{\triangle DBC:}\ (1)\ HG \parallel BC \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathbf{EF \parallel HG}\ (\checkmark)$

ב.

$(3)\ EF = \frac{1}{2}BC\ ,\ HG = \frac{1}{2}BC \overset{(2)}{\Rightarrow} EF = HG$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} HE = FG\ ,\ \angle EHG = \angle EFG$

$(5)\ \mathbf{\triangle EHG \cong \triangle GFE}\ (\checkmark)$

(בשאלה: $\triangle EHG \cong \triangle EFG$. סדר קדקודים זה אינו מתאים לחפיפה.

סדר הקדקודים המתאים לחפיפה הוא כפי שמוצג בפתרון.)

---

(1) קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית (2) כלל המעבר

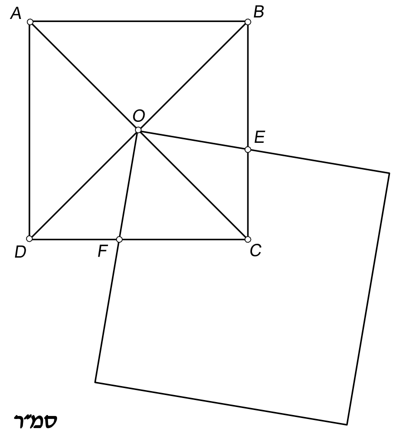
(3) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית

(4) מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות - הוא מקבילית.

במקבילית צלעות נגדיות שוות וזוויות נגדיות שוות (5) משפט חפיפה צלע־זווית־צלע

את המספר הראשוני 5039 **ניתן להציג כך:** $5039 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! + 6 \cdot 6! = 7! - 1$

11. א.



$(1)\ \angle OCE = \angle ODF = 45^{\circ}\ ,\ (2)\ \angle EOC = \angle DOF$

$(3)\ OD = OC \quad \Rightarrow^{(4)}\ \boldsymbol{\triangle OEC \cong \triangle OFD}\ (\surd)$

ב.

$S_{\triangle DOC} = S_{\triangle OFD} + S_{\triangle OFC}$

$=^{(5)}\ S_{\triangle OEC} + S_{\triangle OFC} = S_{OFCE}$

$\Rightarrow^{(6)}\ S_{OFCE} = S_{\triangle DOC} =^{(7)} \frac{100}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{OFCE} = 25}$ **סמ"ר**

---

(1) אלכסוני ריבוע חוצים את זוויותיו (2) כל אחת משתי הזוויות משלימות את $\angle FOC$ ל־ 90°

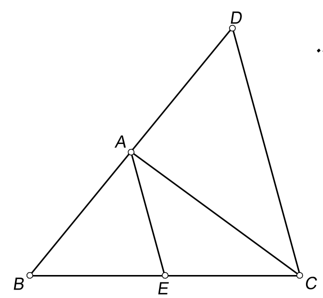
(3) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה (4) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית

(5) מהחפיפה שבסעיף א (6) כלל המעבר

(7) אלכסוני ריבוע מחלקים אותו לארבעה משולשים חופפים

---

12. א.



$\underline{\triangle BDC:}\ (1)\ BE = EC\ ,\ BA = AD \quad \Rightarrow^{(2)}\ \boldsymbol{AE \parallel DC}\ (\surd)$

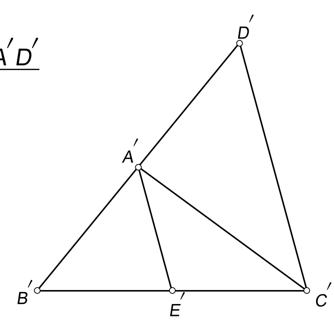
ב.

$(1)\ AE = A'E'\ ,\ (3)\ AE = \frac{1}{2}\ DC\ ,\ A'E' = \frac{1}{2}\ D'C'$

$\Rightarrow \quad 2\ AE = 2\ A'E' \quad \Rightarrow \quad \underline{DC = D'C'}$

$(1)\ BA = AD\ ,\ B'A' = A'D'\ ,\ BA = B'A' \quad \Rightarrow^{(4)}\ \underline{AD = A'D'}$

$(1)\ \underline{AC = A'C'} \quad \Rightarrow^{(5)}\ \boldsymbol{\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'}\ (\surd)$



ג.

$(1)\ AB = A'B'\ ,\ AC = A'C'\ ,\ (6)\ \angle DAC = \angle D'A'C'$

$(7)\ \angle BAC = \angle B'A'C' \quad \Rightarrow^{(8)}\ \boldsymbol{\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'}\ (\surd)$

---

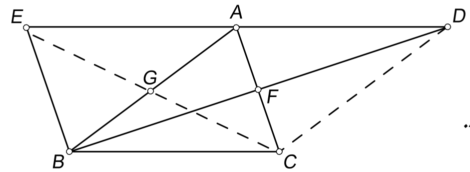
(1) נתון (2) AE קטע אמצעים, לפי הגדרה. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית

(3) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית. גם $A'E'$ קטע אמצעים, הוכחה כמו סעיף א

(4) כלל המעבר (5) משפט חפיפה צלע־צלע־צלע (6) זוויות מתאימות במשולשים חופפים

(7) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה (8) משפט חפיפה צלע־זווית־צלע

13. א.



$(1)\ AF = FC\ ,\ BF = FD$

$\Rightarrow^{(2)}$ **ADCB מקבילית** $(\surd)$

ב.

$(3)\ AD \parallel BC \quad \Rightarrow \quad AE \parallel BC$

$(4)\ BC = AD\ ,\ (1)\ AE = AD \quad \Rightarrow^{(5)}\ BC = AE \quad \Rightarrow^{(6)}$ ACBE מקבילית $\Rightarrow^{(7)}$ $\mathbf{CG = GE}\ (\surd)$

ג.

$(1)\ \angle EBD = 90^\circ\ ,\ (1)\ EA = AD \quad \Rightarrow^{(8)}\ BA = EA =^{(4)} BC \quad \Rightarrow^{(5)}\ \mathbf{BA = BC}\ (\surd)$

ד.

$(1)\ BC = AC\ ,\ (4)\ BC = AD \quad \Rightarrow^{(5)}\ AC = AD$

$(1)\ AF = \frac{1}{2}\,AC \quad \Rightarrow^{(5)}\ AF = \frac{1}{2}\,AD$

$\underline{\triangle AFD:}\ (9)\ \angle F = 90^\circ \quad \Rightarrow^{(10)}\ \angle \mathbf{ADF = 30^\circ}$

---

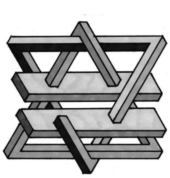
(1) נתון (2) מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית (3) הגדרת מקבילית

(4) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (5) כלל המעבר (6) מרובע שבו זוג צלעות מקבילות זו לזו ושוות זו לזו הוא מקבילית (7) אלכסוני מקבילית חוצים זה את זה

(8) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר

(9) ABCD הוא מעוין (מקבילית שצלעות סמוכות שוות זו לזו). אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה

(10) זווית מול ניצב ששווה למחצית היתר היא בת 30°



כל המספרים 'מעניינים'

*כשילד הפלא ההודי **סריניוואסה רמאנוג'ן** (Srinivasa Aiyangar Ramanujan , 1887-1920) חלה ואושפז בבית חולים, ביקר אותו המתמטיקאי האנגלי **גוגפרי הרולד הארדי** (Godfrey Harold Hardy , 1877-1947) וסיפר שמספר המונית שבה הוא הגיע היה 1729, סתם מספר לא מעניין.*

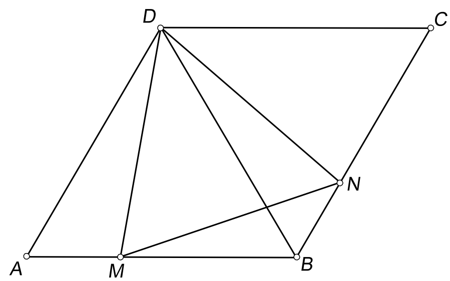
רמאנוג'אן הגיב על כך ואמר שמספר זה הוא דוקא מאוד מעניין, כי הוא המספר הקטן ביותר שניתן להציגו בשתי דרכים שונות כחזקות שלישיות של מספרים טבעיים: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

המספר 1 הוא הראשון וכל מספר טבעי מורכב מיחידות של אחד. 2 הוא הזוגי הראשון והזוגי היחידי שהוא גם ראשוני. 3 הוא הלא־זוגי הראשון שהוא ראשוני (1 אינו נחשב ראשוני). 4 הוא המספר הפריק הראשון. לפי הפיתגוראים המספר 5 קשור לנישואים כי הוא סכום של הזוגי הראשון 2 שנחשב נקבי ו־ 3 שנחשב זכרי.

<u>טענה</u>: כל המספרים 'מעניינים'.

<u>הוכחה</u>: בשלילה: נניח שלא כל המספרים 'מעניינים'. נתבונן במספר ה'לא־מעניין' הקטן ביותר מבין כל המספרים ה'לא מעניינים'. הרי תכונה ייחודית זו שלו הופכת אותו ל'מעניין'. סתירה. מה שהיה להוכיח . . .

14. א.



$(1,2)\quad \angle A = \angle C = 60^\circ$

$(3)\quad AD = AB \quad \overset{(4,5)}{\Rightarrow} \quad \angle ADB = \angle ABD = 60^\circ$

$(6)\quad \underline{\angle C = \angle MBD} \quad (= 60^\circ)$

$(7,3)\quad AB = AD = \underline{BD = DC}$

$(1)\quad AM = BN \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \underline{MB = NC}$

$(9)\quad \boldsymbol{\triangle MDB \cong \triangle NDC} \quad (\surd)$

ב.

$(10)\quad \underline{AD = BD} \;,\; (11)\quad \underline{DM = DN} \;,\; (1)\quad \underline{AM = BN} \quad \overset{(12)}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{\triangle ADM \cong \triangle BDN} \quad (\surd)$

ג.

$S_{DMBN} = S_{\triangle MDB} + S_{\triangle BDN} \overset{(1)}{=} S$

$(10)\quad \triangle MDB \cong \triangle NDC \;,\; \triangle ADM \cong \triangle BDN \quad \overset{(6)}{\Rightarrow} \quad S_{\triangle NDC} + S_{\triangle ADM} = S$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ABCD} = 2S}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

(1) נתון (2) זוויות נגדיות במעוין שוות זו לזו (3) צלעות מעוין שוות זו לזו

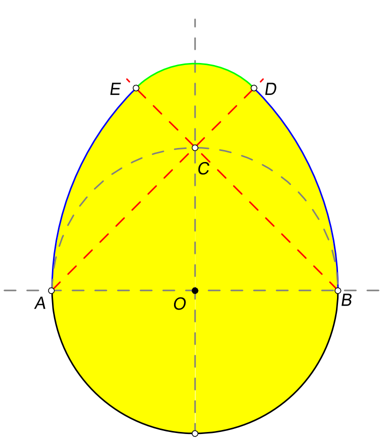
(4) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (5) השלמה ל־ 180° במשולש

(6) כלל המעבר (7) משולש שכל זוויות שוות 60° הוא שווה־צלעות (8) הפרש גדלים שווים

(9) משפט חפיפה צלע־זווית־צלע (10) לעיל (11) צלעות מתאימות במשולשים חופפים

(12) משפט חפיפה צלע־צלע־צלע

כיצד מציירים ביצה?



על מערכת צירים חגים מעגל שמרכזו O וקוטרו AB.

C היא נקודת חיתוך המעגל עם ציר y.

מעבירים ישר דרך B ו־ C ועוד ישר דרך A ו־ C.

חגים קשת מעגל $\overset{\frown}{DB}$ שמרכזו A ומחוגו AB.

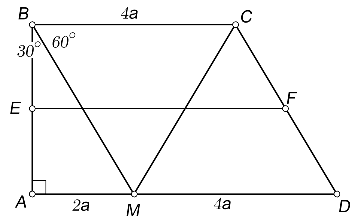
חגים קשת מעגל $\overset{\frown}{AE}$ שמרכזו B ומחוגו BA.

D ו־ E הן נקודות חיתוך של המשך הישרים

AC ו־ BC עם הקשתות.

חגים קשת מעגל $\overset{\frown}{ED}$ שמרכזו C ומחוגו CE.

15. א.



(1) $\angle MBC = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle ABM = 30^\circ$

(2) $AM = \frac{1}{2}BM \quad \Rightarrow \quad 2a = \frac{1}{2}BM \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BM = 4a}$ **(י"א)**

ב.

$BM = BC = 4a \ , \ \frac{EF}{AD} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad EF = \frac{5}{6}AD$

(3) $EF = \frac{BC+AD}{2} = \frac{5}{6}AD \quad \Rightarrow \quad 3\ BC + 3\ AD = 5\ AD$

$3\ BC = 2\ AD \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{3}{2}\ BC = \frac{3}{2} \cdot 4a = 6a \quad \Rightarrow \quad MD = AD - AM = 6a - 2a = 4a$

$BC = MD \ , \ BC \parallel MD \quad \overset{(4)}{\Rightarrow}$ מקבילית $BCDM \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \angle MDC = \angle MBC \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\angle CDM = 60^\circ}$

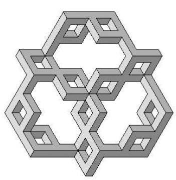
---

(1) גודל זווית במשולש שווה־צלעות (2) ניצב במ"ז מול זווית 30° שווה למחצית היתר

(3) קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום אורכי הבסיסים

(4) זוג צלעות שוות ומקבילות זו לזו במרובע - מגדיר מקבילית

(5) זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

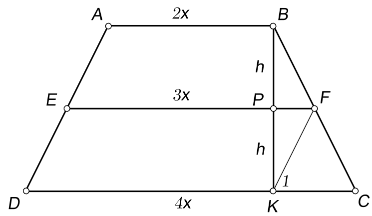


אפס - רעיון מסוכן

ב־21 בספטמבר 1997, בעת שה'יורקטאון' הפליגה לאורך חופי ווירג'יניה, הזדעזעה סיירת הטילים, בשווי מיליארד דולר, ונעצרה. 'יורקטאון' מתה במקומה. ספינות מלחמה תוכננו ונבנו כדי להחזיק מעמד מול מהלומות טורפדו או פיצוץ מוקשי ים, ואף שהיתה ממוגנת כנגד כלי נשק אלה, איש לא חשב להגן על ה'יורקטאון' בפני האפס. היה זה משגה רציני. זמן קצר לפני כן הותקנה במחשבי ה'יורקטאון' תוכנה חדשה שנועדה לפקח על פעילות המנועים. לרוע המזל, איש לא גילה את פצצת הזמן האורבת בתוכנה, 'אפס' שהמהנדסים היו אמורים להרחיק בעת ההתקנה. מסיבה זו או אחרת, האפס לא התגלה, והוא נותר חבוי במעמקי התוכנה, חבוי עד לשלב שבו התוכנה העלתה אותו לזִכרון - ונשנקה. כשמערכת המחשבים של ה'יורקטאון' ניסתה לחלק באפס, מנועיה - בעלי עוצמה של 80,000 כוח סוס - שותקו מיידית. נדרשו כמעט שלוש שעות עבודה עד שמערכות ההפעלה לשעת חירום חוברו למנועים, וזאת כדי שספינת הקרב תצליח לקרטע לנמל הקרוב. מהנדסים עמלו יומיים כדי להיפטר מהאפס, לתקן את המנועים, ולהחזיר את ה'יורקטאון' לכושרה הקרבי. שום מספר אחר לא יכול היה לגרום לנזק שכזה. אך תקלות מחשב כמו שפגעו ב'יורקטאון' מדגימות רק מעט מכוחו של האפס. תרבויות שינסו מותניים כנגדו, ופילוסופיות קרסו תחת השפעתו, משום שהאפס שונה מכל המספרים האחרים. הוא מאפשר הצצה במשהו שכלל לא ניתן להעלות על הדעת, ובאינסוף. זו היתה הסיבה שכה חששו מפניו ושנאו אותו עד שהוא אף הוצא מחוץ לחוק.

(מתוך: 'אפס - ביוגרפיה של רעיון מסוכן' / צ'רלס זייף - הוצאת מי-אן)

16. א.



(1) $BF = FC \;,\; BK \perp KC \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad KF = \frac{1}{2}BC$

$BF = FC \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}BC = FC \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{FK = FC}$ (✓)

ב.

(4) $\angle C = \angle D$, (5) $\angle C = \angle K_1 \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \angle D = \angle K_1 \quad \overset{(6)}{\Rightarrow} \quad DE \parallel FK$

(7) $EF \parallel DK \quad \overset{(8)}{\Rightarrow}$ **EFKD מקבילית** (✓)

ג.

(9) $AB = 2x \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad DC = 4x \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad EF = \frac{2x+4x}{2} = 3x$

(11) $BP = PK \overset{(9)}{=} h \quad \overset{(12)}{\Rightarrow} \quad \frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x+3x)\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot(3x+4x)\cdot h} = \frac{5x}{7x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{5}{7}}$

---

(1) נתון (2) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר (3) כלל המעבר

(4) זוויות בסיס בטרפז שווה־שוקיים (5) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים

(6) אם זויות מתאימות שוות בישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי - הישרים מקבילים

(7) קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים (8) הגדרת מקבילית (9) סימון

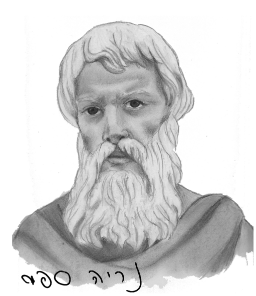
(10) קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום אורכי בסיסיו

(11) PF ב־ $\triangle BKC$ חוצה צלע ומקביל לשלישית ולכן הוא קטע אמצעים באותו משולש

(12) כל אחד מהמרובעים הנ"ל הוא טרפז (מ־(7) בסיסים מקבילים.

מהנתון (טרפז) - השוקיים אינן מקבילות). הפעלת הנוסחה של שטח טרפז

אֶוקְלִידֶס



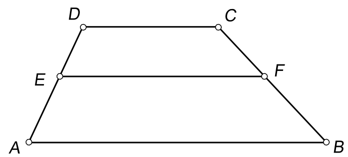
הגאומטרית האוקלידית נקראת כך על שם **אֶוקְלִידֶס** 330–275 לפנה"ס. מתמטיקאי יווני שחי באלכסנדריה שבמצרים ויִסד שם בית ספר. אחד מגדולי המתמטיקה היוונית. חִבּורו הגדול נקרא ספר 'היסודות' הכולל 13 כרכים בהם ביסס את הגאומטריה כמדע. הספר כולל את גיאומטרית המישור, הנדסת המרחב ונושאים נבחרים בתורת המספרים. מספר תרגומיו של ספר זה נופל אך ורק ממספר תרגומי התנ"ך. הגאומטריה הרגילה המוכרת לנו, נקראת כאמור, 'גאומטריה אוקלידית' על שמו.

אחת האכסיומות של גאומטריה זו אומרת כי ישרים מקבילים אינם נפגשים לעולם. במאה ה־19 התפתחה הגאומטריה ה'לא אוקלידית' שנקודת המוצא שלה היא שקווים מקבילים אכן נפגשים - באינסוף.

אוקלידס עסק ותרם גם בתחומי האסטרונומיה, האופטיקה, המוסיקה והמכניקה.

גאומטריה אוקלידית - ב - פרופורציה ודמיון ללא מעגל - שאלות

.1 (005 , קיץ ס״ז - 2007 , מועד א)



ישר, המקביל לבסיסי הטרפז $ABCD$,

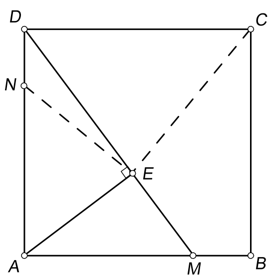
חותך את שוקי הטרפז בנקודות E ו־ F.

נתון: $\frac{DE}{EA}=\frac{3}{4}$, $DC=11_{cm}$, $AB=25_{cm}$

א. חשב את אורך הקטע EF.

ב. חשב את היחס שבין שטח הטרפז $EFCD$ ובין שטח הטרפז $ABFE$. הסבר את חישוביך. **(57)**

.2 (005 , קיץ ס״ז - 2007 , מועד ב)



בריבוע $ABCD$ הנקודה M נמצאת על הצלע AB,

והנקודה N נמצאת על הצלע AD,

כך ש־ $MB=ND=1_{cm}$.

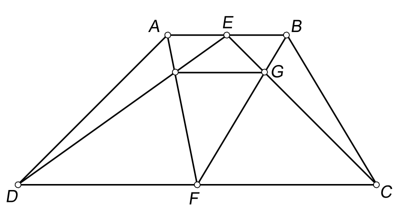
$AE\perp MD$, ואורך צלע הריבוע הוא 4_{cm}.

א. חשב את אורכי הקטעים:

(1) MD **(2)** DE **(3)** AE

ב. הוכח כי $\triangle AEN\sim\triangle DEC$. היעזר בסעיף א׳. **(58)**

.3 (005 , סתיו ס״ח - 2007 , מועד לוחמים)



בטרפז $ABCD$ הנקודות E ו־ F

הן אמצעי הבסיסים AB ו־ DC בהתאמה.

הקטעים BF ו־ CE נחתכים בנקודה G,

והקטעים AF ו־ DE נחתכים בנקודה H.

נתון: $DC=24_{cm}$, $AB=8_{cm}$.

א. חשב את היחס $\frac{EG}{GC}$.

ב. הוכח כי הקטע HG מקביל לבסיסי הטרפז.

ג. חשב את אורך הקטע HG. **(59)**

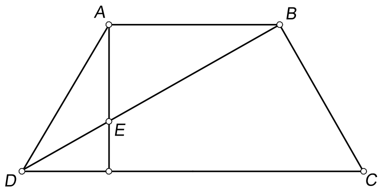
תשובות

.1 **א.** 17_{cm} **ב.** $\frac{1}{2}$

.2 **א.** **(1)** $DM=5_{cm}$ **(2)** $DE=3.2_{cm}$ **(3)** $AE=2.4_{cm}$

.3 **א.** $\frac{EG}{GC}=\frac{1}{3}$ **ג.** $HG=6_{cm}$

.4 (005 , חורף ס"ח - 2008)



$ABCD$ הוא טרפז שווה־שוקים.

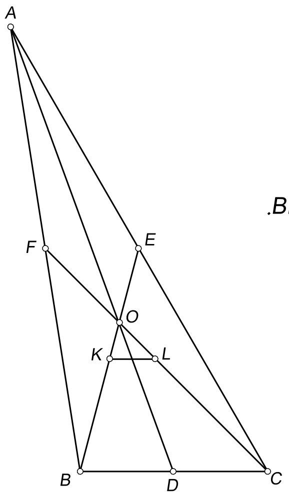
גובה הטרפז, AH, חותך את האלכסון BD בנקודה E.

נתון: $AD = AB = BC = a$, $CD = 2a$.

א. חשב את היחס $\frac{AE}{EH}$. נמק.

ב. הבע באמצעות a את האורך של AE. **(59)**

.5 (005 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד א)



במשולש ABC התיכונים AD , BE ו־ CF נפגשים בנקודה O.

נקודה L היא אמצע התיכון CF , ו־ K היא אמצע התיכון BE.

א. נתון: $BE = 12_{cm}$, $CF = 18_{cm}$

(1) חשב את אורכי הקטעים LO ו־ KO.

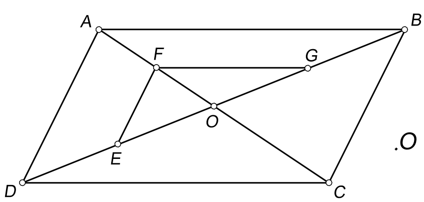
(2) חשב את היחס $\frac{LO}{CL}$.

ב. נתון כי שטח המשולש BOD הוא 20_{cm^2}.

מצא את שטח המשולש DOC

ואת שטח המשולש KOL. נמק. **(60)**

.6 (005 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד ב)



א. הוכח: תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים ששטחיהם שווים.

ב. במקבילית $ABCD$ האלכסונים נפגשים בנקודה O.

EF הוא קטע אמצעים במשולש ADO .

FG הוא קטע אמצעים במשולש ABO.

נתון כי שטח המקבילית $ABCD$ הוא S.

הבע באמצעות S את שטח המשולש EFG. נמק. **(61)**

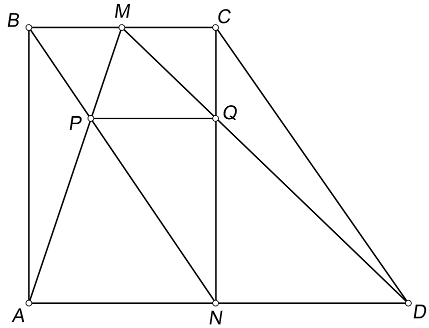
במקום להצטער שלשושנה יש קוצים - שמח שלקוצים יש שושנה.

תשובות

.4 **א.** $\frac{AE}{EH} = 2$ **ב.** $AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (יחידות אורך)

.5 **א.** $\frac{LO}{CL} = \frac{1}{3}$, $KO = 2_{cm}$, $LO = 3_{cm}$ **ב.** $S_{\triangle ODC} = 20_{cm^2}$, $S_{\triangle OKL} = 2.5_{cm^2}$

.6 **ב.** $S_{EFG} = \frac{S}{8}$ (יחידות ריבועיות)



.25 (005 , קיץ תשע"ב - 2012 , לוחמים)

מרובע $ABCD$ הוא טרפז ($BC \parallel AD$).

M ו־ N הן אמצעי הבסיסים.

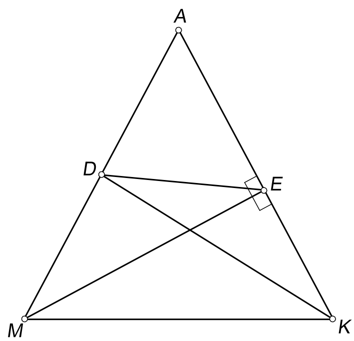
P היא נקודת החיתוך של BN ו־ AM .

Q היא נקודת החיתוך של MD ו־ CN .

א. הוכח: **(1)** $\frac{MC}{ND} = \frac{MQ}{QD}$ **(2)** $\frac{MC}{ND} = \frac{MP}{PA}$.

ב. הוכח: $PQ \parallel AD$.

ג. נתון: $BC = 6_{cm}$, $PQ = 4_{cm}$. חשב את האורך של AD . **(74)**



.26 (005 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד א)

במשולש שווה־שוקיים AMK ($AM = AK$)

KD הוא תיכון לשוק AM , ו־ ME הוא גובה לשוק AK .

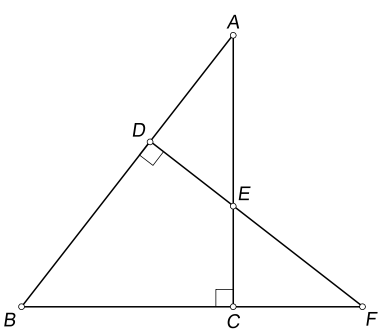
א. הוכח: $\angle DAE = \angle DEA$.

ב. נתון גם: $MK = 2 \cdot DE$. ME ו־ DK נחתכים בנקודה P.

(1) מהו הגודל של $\angle MAK$? נמק.

(2) הוכח: $DE \parallel MK$.

(3) מצא פי כמה גדול היקף המשולש MPK מהיקף המשולש EPD . **(74)**



.27 (804 , קיץ תשע"ג - 2013 , לוחמים)

נתון משולש ישר־זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$).

F היא נקודה על המשך הצלע BC .

מן הנקודה F מעבירים אנך ל־ AB החותך את

הניצב AC בנקודה E ואת הצלע AB בנקודה D .

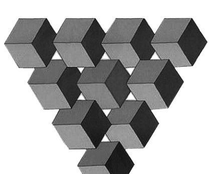
א. הוכח: $\triangle AED \sim \triangle FBD$.

ב. נתון: $AD = 8_{cm}$, $BD = 12_{cm}$, $AE = 10_{cm}$.

חשב את אורך הקטע FE .

ג. הוכח: $\triangle AED \cong \triangle EFC$. **(75)**

תשובות

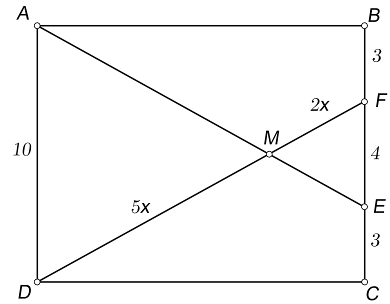


.25 **ג.** $AD = 12_{cm}$

.26 **ב.** **(1)** $\angle MAK = 60^\circ$ **(3)** פי שניים

.27 **ב.** $FE = 10_{cm}$

34. א.



$(1)\ \angle MAD = \angle MEF\ ,\ \angle MDA = MFE$

$(2)\ \triangle \mathbf{AMD} \sim \triangle \mathbf{EMF}\ \ (\checkmark)$

ב.

$AB \overset{(3)}{=} DC\ ,\ AE \overset{(4)}{=} DF\ \ ,\ \ \angle B \overset{(5)}{=} \angle C = 90^\circ$

$(6)\ \triangle ABE \cong \triangle DCF\ \ \overset{(7)}{\Rightarrow}\ \ BE = CF$

$BF + FE = CE + EF\ \ / - EF\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{BF = EC}\ \ (\checkmark)$

ג.

$BC \overset{(3)}{=} AD = 10\ \ ,\ \ CE = BF = 3\ \ \Rightarrow\ \ EF = 4$

$\frac{MD}{MF} \overset{(8)}{=} \frac{AD}{EF} \overset{(4)}{=} \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\ \ \Rightarrow\ \ MD = 5x\ ,\ MF = 2x\ \ \Rightarrow\ \ DF = 7x\ \ \Rightarrow\ \ \frac{DF}{DM} = \frac{7x}{5x} = \mathbf{\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}}$

---

(1) זוויות מתחלפות במקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי   (2) משפט דמיון זווית־זווית

(3) צלעות נגדיות במלבן שוות זו לזו   (4) נתון   (5) זוויות מלבן ישרות

(6) משפט חפיפה צלע־צלע־זווית   (7) צלעות מתאימות במשולשים חופפים

(8) יחס הדמיון

מגדל של פלינדרומים ראשוניים

2

30203

133020331

1713302033171

12171330203317121

151217133020331712151

1815121713302033171215181

16181512171330203317121518161

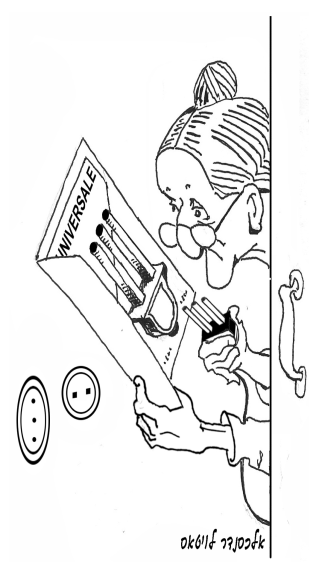
316181512171330203317121518161 33

933316181512171330203317121518161 3339

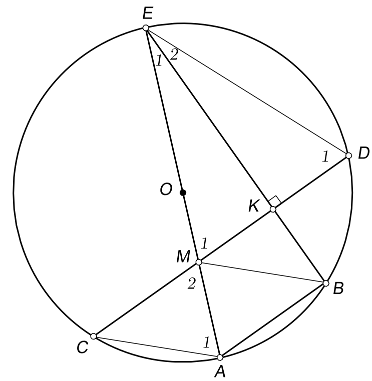
11933316181512171330203317121518161 333911

(**Garland Lee Honaker**, מרצה למתמטיקה בוירג'יניה, ארה"ב)

לא ידוע אם יש אינסוף פלינדרומים ראשוניים.



13. א.



$(1)\ \angle B = 90^\circ \ ,\ (2)\ AB \parallel CD$

$(3)\ \angle EKC = \angle B = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EB \perp CD}\ (\surd)$

ב.

$(2)\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} \quad \Rightarrow^{(4)}\ \angle E_1 = \angle E_2$

$\Rightarrow^{(5)}\ \mathbf{EM = ED}\ (\surd)$

ג.

$(2)\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CA} \quad \Rightarrow^{(6)}\ CA = AB \ ,\ (7)\ \angle M_1 = \angle D_1$

$(4)\ \angle A_1 = \angle D_1 \ ,\ (8)\ \angle M_1 = \angle M_2$

$(9)\ \angle A_1 = \angle M_2 \quad \Rightarrow^{(10)}\ CA = CM \quad \Rightarrow^{(9)}\ AB = CM \quad \Rightarrow^{(11)}$ ACMB מקבילית

$CA = AB \quad \Rightarrow^{(12)}$ **ACMB מעוין** $(\surd)$

---

(1) זווית היקפית הנשענת על קוטר (2) נתון (3) השלמה ל־ 180° במשולש

(4) זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות

(5) משולש שחוצה זווית שלו מתלכד עם גובה שלו - הוא שווה־שוקיים

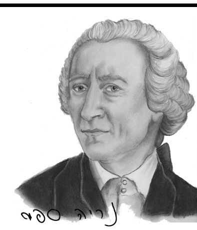
(6) לקשתות שוות - מיתרים שווים (7) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים

(8) זוויות קדקודיות (9) כלל המעבר

(10) משולש ששתיים מזוויותיו שוות הוא שווה־שוקיים

(11) מרובע שזוג צלעות בו שוות ומקבילות ־ הוא מקבילית

(12) מקבילית שצלעות סמוכות בה שוות - היא מעוין



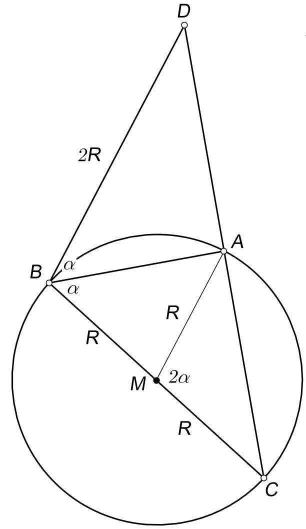
ליאונרד אוילר *1707-1783*. מתמטיקאי ופיזיקאי שוויצי. למד בבזל, פעל ברוסיה. פיתח תחומים רבים בגאומטריה אנליטית ובטריגונומטריה ותרם רבות לגאומטריה ולתורת המספרים. פרסם כ־850 ספרים וכתבים בכל תחומי המתמטיקה. לאוילר נולדו 13 ילדים, אך רק 5 מהם שרדו את גיל הינקות. הוא סיפר שהוא השיג חלק מתגליותיו הגדולות כאשר תינוק תלוי בזרועו ואחר התרוצץ סביבו.

בגיל 31 איבד את ראייתו בעינו הימנית ו־27 שנים מאוחר יותר, בגיל 58, הפך כמעט לעיוור לאחר ניתוח בעינו האחרת. כמחצית עבודותיו עשה תוך כדי מגבלת הראיה החמורה שלו.

23. א.

$\angle ABD \overset{(1)}{=} \alpha \;,\; \angle AMC \overset{(2)}{=} 2\alpha \;\overset{(3)}{\Rightarrow}\; \angle ABC = \alpha$

$\Rightarrow\; \boldsymbol{\angle ABD = \angle ABC}\ (\surd)$



ב.

$\angle CBD = \angle CMA = 2\alpha \;,\; \angle C \overset{(4)}{=} \angle C$

$\overset{(5)}{\Rightarrow}\; \boldsymbol{\triangle CBD \sim \triangle CMA}\ (\surd)$

ג.

$\angle AMC = \angle DBC\ (= 2\alpha) \;\overset{(6)}{\Rightarrow}\; MA \parallel BD$

$\boldsymbol{MB = MC = R \;\overset{(7)}{\Rightarrow}}$ **קטע אמצעים $\boldsymbol{AM}$** $(\surd)$

ד.

$MA = MB \overset{(2)}{=} AB\ (= R) \;\overset{(8)}{\Rightarrow}\; \alpha = 60^\circ \;\Rightarrow\; 2\alpha = 120^\circ$

$BD \overset{(9)}{=} 2\,MA = 2R$

$S_{\triangle CBD} = \dfrac{BC \cdot BD \cdot \sin 120^\circ}{2} = \dfrac{2R \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{S_{\triangle CBD} = R^2\sqrt{3}}$ **(יחידות ריבועיות)**

(אפשר גם: $S_\triangle = \dfrac{CD \cdot BA}{2}$. $AB \perp CD$, $AC = AD$. ופיתגורס על $\triangle ABC$.)

---

(1) סימון (2) נתון (3) זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת

(4) זווית משותפת (5) משפט דמיון זווית־זווית

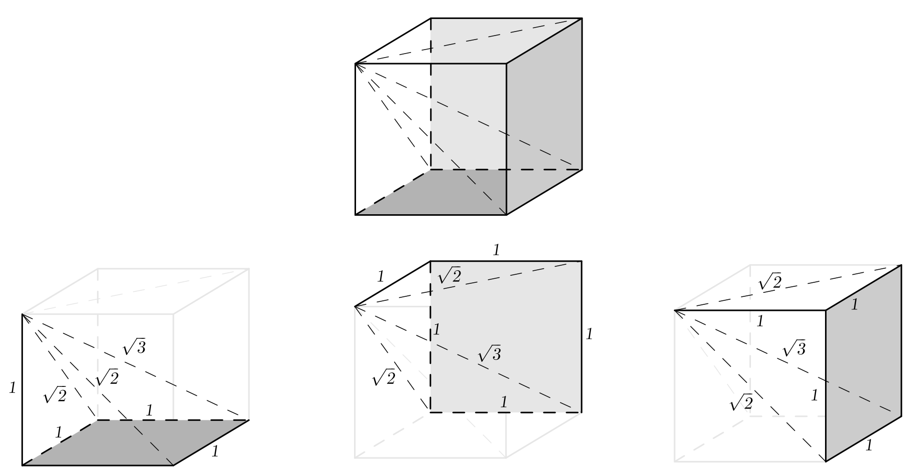
(6) אם זוויות מתאימות בשני ישרים, הנחתכים ע״י ישר שלישי, שוות זו לזו - הישרים מקבילים זה לזה

(7) קטע במשולש המחבר אמצע צלע אחת לצלע אחרת ומקביל לצלע השלישית - הוא קטע אמצעים

(8) זווית במשולש שווה־צלעות (9) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית

ניתן לחלק קוביה לשלוש פירמידות זהות.

בציור מודגמת החלוקה על קוביה שאורך צלעה הוא יחידת אורך אחת.



31. א. (1)

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-x^2}\quad,\quad x-x^2\neq 0\quad\Rightarrow\quad x(1-x)\neq 0\quad\Rightarrow\quad x\neq 0\,,\ x\neq 1$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{(x<0)\cup(0<x<1)\cup(x>1)}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+1}{x-x^2}=\frac{\to 1}{\to 0}=\infty\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x-x^2}=\frac{\to 4}{\to 0}=\infty\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(3+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-x)}=\frac{\to(3+0)}{\to(1-\infty)}=\frac{\to 3}{\to\infty}=0\quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=0}$$

(3)-(4)

$$f'(x)=\frac{3(x-x^2)-(1-2x)(3x+1)}{(x-x^2)^2}=\frac{3x-3x^2-3x-1+6x^2+2x}{(x-x^2)^2}=\boxed{\frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}}\overset{?}{=}0$$

$$3x^2+2x-1=0\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{6}\quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad,\quad x_2=\frac{-6}{6}=-1$$

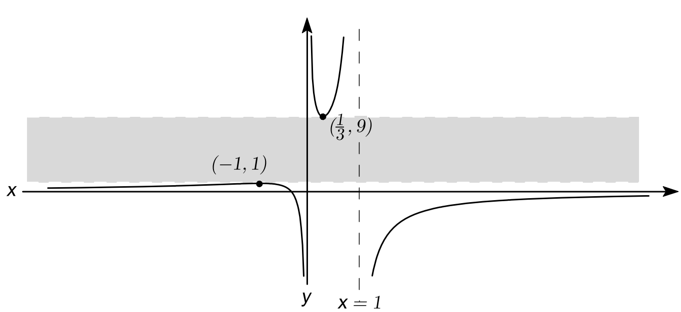
x		-1		0		$\frac{1}{3}$		1	
f'	$\frac{+}{+}=+$	0	$\frac{-}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{+}{+}=+$
f	↗	max	↘	asym	↘	min	↗	asym.	↗

$$f(-1)=\frac{-3+1}{-1-(-1)^2}=\frac{-2}{-1-1}=1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{max\ (-1,1)}$$

$$f(\tfrac{1}{3})=\frac{1+1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}=\frac{2}{\frac{2}{9}}=9\quad\Rightarrow\quad \mathbf{min\ (\tfrac{1}{3},9)}$$

$\underline{\nearrow}$: $\mathbf{(x<-1)\cup(\frac{1}{3}<x<1)\cup(x>1)}$, $\underline{\searrow}$: $\mathbf{(-1<x<0)\cup(0<x<\frac{1}{3})}$

ב.



ג. אגף שמאל של המשוואה $\frac{3x+1}{x-x^2}=k$ הוא הפונקציה אותה חקרנו.

לפי הציור, בין נקודת המקסימום $(-1,1)$, לבין נקודת המינימום $(\frac{1}{3},9)$

אין קו אופקי $y=k$ שיש לו נקודה משותפת עם הפונקציה (התחום האפור בציור).

מכאן שעבור $\mathbf{1<k<9}$ אין פתרון למשוואה הנתונה.

40. א. (1)

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x-3} \quad , \quad x^2+2x-3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}\neq\frac{-2\pm4}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x\neq 1\ ,\ x\neq -3}$$

(2)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\to -3}} \frac{x^2}{x^2+2x-3}=\frac{1 \text{ or } 9}{\to 0}=\infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=1\ ,\ x=-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{1}{\cancel{x^2}}}{\cancel{x^2}(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}=\frac{1}{\to(1+0-0)}=1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=1}$$

ב.

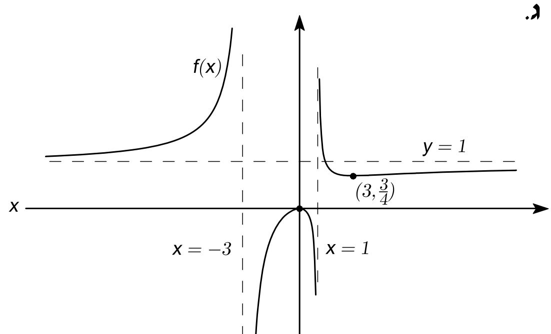
$$f'(x)=\frac{2x(x^2+2x-3)-(2x+2)\cdot x^2}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{2x^3+4x^2-6x-2x^3-2x^2}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{2x^2-6x}{(x^2+2x-3)^2}=\boxed{\frac{2x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}}\overset{?}{=}0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=0 \ , \ x_2=3$$

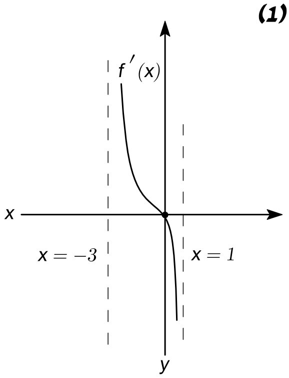
x		-3		0		1		3	
f'	$\frac{--}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{--}{+}=+$	0	$\frac{+-}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{+-}{+}=-$	0	$\frac{++}{+}=+$
f	$\nearrow$	asym.	$\nearrow$	max	$\searrow$	asym.	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f(0)=0 \ , \ f(3)=\frac{9}{9+6-3}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\max(0,0)\ ,\ \min(3,\tfrac{3}{4})}$$

ג.

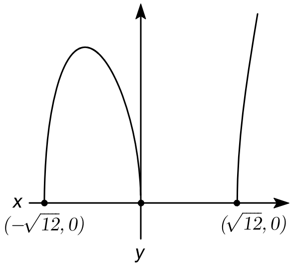


ד. (1)



המלחמה הקצרה ביותר

מלחמת אנגליה־זנזיבר התנהלה בין האימפריה הבריטית לזנזיבר ב־27.8.1896. המלחמה ארכה 38 דקות.
הסולטאן של זנזיבר עד אז, שיתף פעולה עם הבריטים. אחיינו תפס את השלטון לאחר מות הסולטאן.
הבריטים דרשו ממנו להתפטר כי העדיפו מועמד אחר.
לאחר שפקע האולטימטום שלהם לאותו אחיין בשעה 9:00 בבוקר, הפגיזו ספינות הצי את הארמון, היאכטה של המושל ואת המגדלור המקומי. ההפגזה הופסקה לאחר 38 דקות ובכך בא הקץ לשלטונו של האחיין.
במהלך אותם 38 דקות נהרגו כ־500 איש.
זה עדיין פחות מקצב המוות שהיה במלחמת העולם שניה: כ־1200 מידי שעה!



.21 (804 , חורף תשע"ו - 2016)

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^3-12x}$, a הוא פרמטר.

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \ge \sqrt{12}$, $-\sqrt{12} \le x \le 0$.

א. על־פי הערכים שבגרף, מצא את הערך של a.

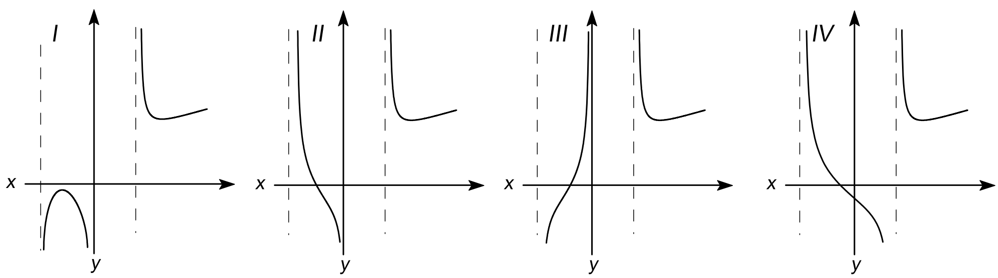
הצב $a=1$, וענה על הסעיפים ב, ג, ד.

ב. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא עבור אילו ערכים של k יש רק פתרון אחד למשוואה $f(x)=k$. **(296)**

ד. **(1)** מה הן האסימפטוטות המאונכות לציר x של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) איזה מן הגרפים שלפניך (I-IV) הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



.22 (804 , קיץ תשע"ו - 2016 , מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+6x+7}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

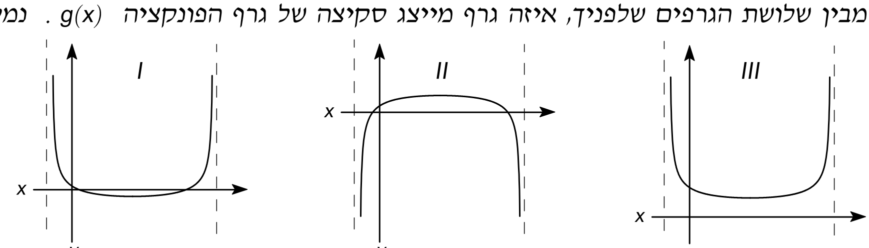
ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן. **(297)**

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מבין שלושת הגרפים שלפניך, איזה גרף מייצג סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. נמק.



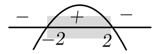
תשובות

.21 **א.** $a=1$ **ב.** $max\ (-2,4)$ **ג.** $k>4$ **ד.** **(1)** $x_{\leftarrow}=\pm\sqrt{12}$, $x_{\rightarrow}=0$ **(2)** II

.22 **א.** $-1 \le x \le 7$ **ב.** $min_{ab.}(7,0)$, $max_{ab.}(3,4)$, $min_{ab.}(-1,0)$ **ד.** **(1)** $-1<x<7$ **(2)** III

25. א.

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

$4 - x^2 \geq 0 \;\;,\;\; x_{1,2} = \pm 2 \;\;,\;\; a = -1 < 0 \;\;\Rightarrow$  $\Rightarrow \;\; \mathbf{-2 \leq x \leq 2}$

ב. (1)

$y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x\sqrt{4-x^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (1)\;\; x = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{(0,0)}$

$(2)\;\; 4 - x^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = \pm 2 \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{(\pm 2, 0)}$

(2)

$f'(x) = 1\cdot\sqrt{4-x^2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x) = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}} \overset{?}{=} 0$

$4 - 2x^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 2x^2 = 4 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 = 2 \;\;\Rightarrow\;\; x = \pm\sqrt{2}$

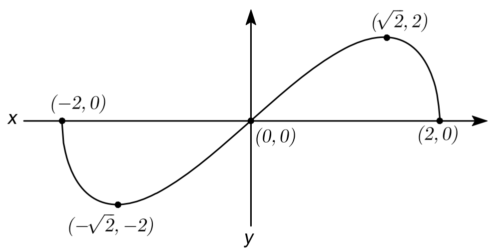
x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
f'	$\emptyset$	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	$\emptyset$
f	$max_{ep.}$	↘	min	↗	max	↘	$min_{ep.}$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2} = 2$

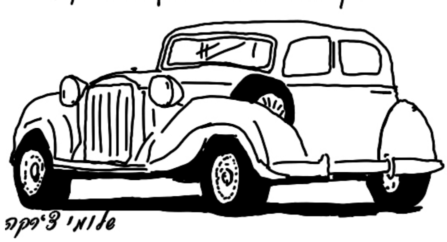
$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2} = -2$

$\mathbf{max_{ep.}\,(-2,0)\;\;,\;\; min\;(-\sqrt{2},-2)\;\;,\;\; max\;(\sqrt{2},2)\;\;,\;\; min_{ep.}\,(2,0)}$

ג.



בן כמה אמרת שקוראים לך?

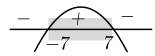


"Britain and France had to choose between war and dishonour.
They chose dishonour. They will have war"

("בריטניה וצרפת צריכות היו לבחור בין מלחמה לבין חרפה. הם בחרו בחרפה. הם יקבלו מלחמה".)

וינסטון צ'רצ'יל *(1874-1965)*, על הסכם מינכן *(1938)*. זה באמת מה שהיה.
את ההסכם 'השיג' מהיטלר יש"ו ראש ממשלת בריטניה בזמנו **נוויל צ'מברליין** *(1869-1940)*.
חצי שנה לאחר פרוץ מלחמת העולם השניה נאלץ להתפטר.
צ'רצ'יל החליף אותו בתפקיד וניהל את המלחמה עד למיגורה של החיה הנאצית.

26. א. (1)

$f(x)=\sqrt{49-x^2}$. $49-x^2 \geq 0$, $x_{1,2}=\pm 7$, $a=-1<0$ $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ $\mathbf{-7 \leq x \leq 7}$

(2)

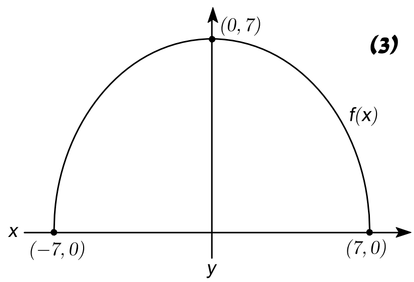
$\boxed{f'(x)=\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{49-x^2}}}\overset{?}{=}0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$

x	-7		0		7
f'	$\emptyset$	$\frac{--}{+}=+$	0	$\frac{-+}{+}=-$	$\emptyset$
f	$min_{ep.}$	↗	max	↘	$min_{ep.}$

$f(\pm 7)=0$, $f(0)=7$ $\Rightarrow$ $\mathbf{min_{ep.}(\pm 7,0)}$

$\mathbf{max\ (0,7)}$

(3)



ב. (1)

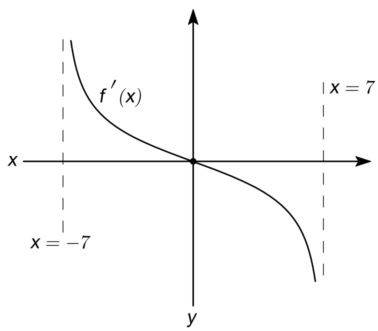
$$\lim_{x\to\pm 7\mp}\frac{-x}{\sqrt{49-x^2}}=\frac{\to\mp 7}{\to +0}=\mp\infty$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_{\leftarrow}=-7}$, $\mathbf{x_{\rightarrow}=7}$

(2) מהטבלה ב־א(2):

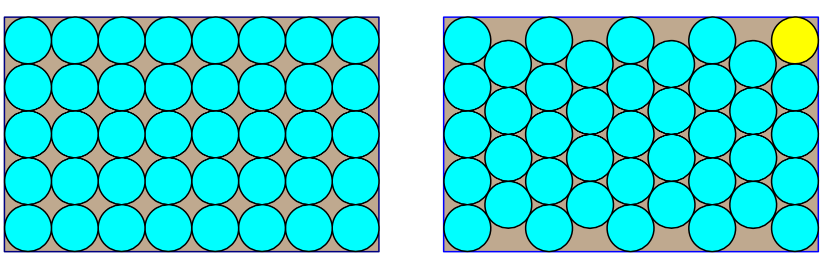
<u>$+:$</u> $\mathbf{-7<x<0}$, <u>$-:$</u> $\mathbf{0<x<7}$

(3)



חידות 40–41

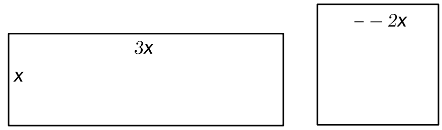
מיכל מלבני המכיל 40 כדורים כמטריצה 8×5 יכול להכיל כדור נוסף, כמתואר להלן:



33. א. רוחב המלבן: $3x$. היקף המלבן: $2(3x+x)=8x$. b - אורך צלע הריבוע.

$4b+8x=a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b=\frac{a-8x}{4}=\frac{a}{4}-2x}$

ב.



$S(x)=(\frac{a}{4}-2x)^2+x\cdot 3x=(\frac{a}{4}-2x)^2+3x^2$

$S'(x)=2(\frac{a}{4}-2x)\cdot(-2)+6x=-a+8x+6x=14x-a \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{14}$

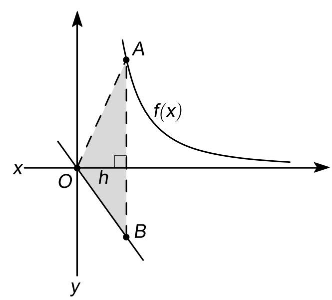
$S''(x)=14 \quad \Rightarrow \quad S''(\frac{a}{14})>0 \quad \Rightarrow \quad min \ (\surd) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=\frac{a}{14}}$

ג.

$b=\frac{a}{4}-2\cdot\frac{a}{14}=\underset{\text{נתון}}{3} \quad \Rightarrow \quad --\frac{a}{7}=3 \quad \Rightarrow \quad 7a-4a=84 \quad \Rightarrow \quad 3a=84 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=28}$

---

34. א.



$A(x,\frac{9}{x^2}) \quad , \quad B(x,-\frac{4}{3}x) \quad , \quad AB=y_A-y_B=\frac{9}{x^2}+\frac{4}{3}x$

$h=x \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle}=S(x)=\frac{1}{2}x(\frac{9}{x^2}+\frac{4}{3}x)=\frac{9}{2x}+\frac{2x^2}{3}$

$S'(x)=-\frac{9}{2x^2}+\frac{4x}{3}=\boxed{\frac{-27+8x^3}{6x^2}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^3=27$

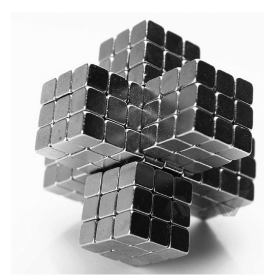
$\Rightarrow \quad x^3=\frac{27}{8}=(\frac{3}{2})^3 \quad \Rightarrow \quad x=1\frac{1}{2}$

x	0		$1\frac{1}{2}$	
S'		$-$	0	$+$
S		↘	min	↗

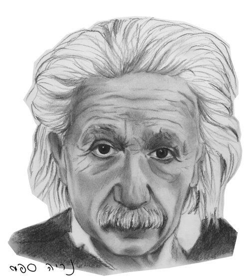
$f(1\frac{1}{2})=\frac{9}{1.5^2}=\frac{\quad}{4}=\frac{9\cdot 4}{9}=4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A\ (1\frac{1}{2},4)}$

ב.

$S_{min}=S(1\frac{1}{2})=\frac{9}{2\cdot 1.5}+\frac{2\cdot 1.5^2}{3}=3+1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}>4 \quad \Rightarrow$ **<u>לא</u>**

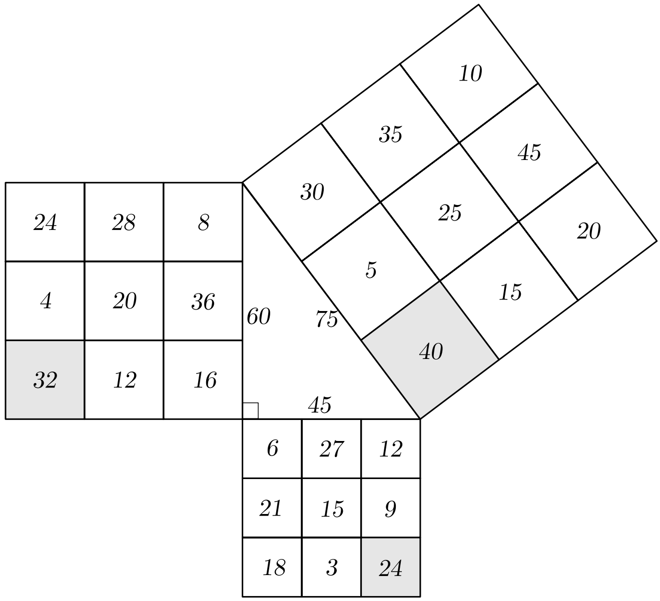


כה אמר אלברט איינשטיין



"הדת שלי מורכבת מהערצה כנועה, לרוח העילאית הבלתי מוגבלת,
המגלה את עצמה בפרטים קלי הדעת,
שאנו מסוגלים לתפוש במוחותינו השבריריים והחלושים.
השכנוע העמוק הזה בנוכחותו של כח תבוני עליון,
המתגלה ביקום שאינו ניתן להבנה, הוא אידיאת הדת שלי"
צניעות של אדם גדול.

הכי פתגורס שיש



בציור משולש שאורכי צלעותיו הינם 60 ,45 ו־75 יחידות אורך.

שלשה זו, הינה שלשה פיתגורית: $45^2 + 60^2 = 74^2$.

על כל אחת מצלעות המשולש בנוי ריבוע קסם שסכום כל שורה, כל עמודה וכל אלכסון שלו שווה לאורך הצלע עליה הוא בנוי (בדוק).

מה שעוד יותר יפה כאן הוא שהמספרים המתאימים בריבועי הקסם, מהווים אף הם שלשה פיתגורית.

אם נשווה את מיקום תאי הריבועים

ע"פ התאים האפורים בציור (24, 32, 40),

כשהריבועים 'יושבים' זה על זה, באופן הבא:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & \underline{27} & 12 \\ \hline \underline{21} & 15 & \underline{9} \\ \hline \underline{18} & 3 & 24 \\ \hline \end{array}^{\,2} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & \underline{36} & 16 \\ \hline \underline{28} & 20 & \underline{12} \\ \hline \underline{24} & 4 & 32 \\ \hline \end{array}^{\,2} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 10 & \underline{45} & 20 \\ \hline \underline{35} & 25 & \underline{15} \\ \hline \underline{30} & 5 & 40 \\ \hline \end{array}^{\,2}$$

נקבל 9 שלשות פיתגוריות:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \quad ; \quad 27^2 + 36^2 = 45^2 \quad ; \quad 12^2 + 16^2 = 20^2 \quad ; \quad 21^2 + 28^2 = 35^2$$

$$15^2 + 20^2 = 25^2 \quad ; \quad 9^2 + 12^2 = 15^2 \quad ; \quad 18^2 + 24^2 = 30^2 \quad ; \quad 3^2 + 4^2 = 5^2 \quad ; \quad 24^2 + 32^2 = 40^2$$

וזה עוד לא הכל: נבחר מספר משבצות כלשהו באחד הריבועים, ונחבר את הסכום המתקבל מהם.

נבצע פעולה זו באותם תאים מתאימים בשני הריבועים האחרים.

קיבלנו שלושה מספרים שגם הם שלשה פיתגורית !!!

יש 502 אפשרויות כאלה (לא בחומר של שלוש יחידות): $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \ . \ . \ . \ + \binom{9}{9} = 502$

ניקח לדוגמה, את ארבעת המספרים הבאים מהריבוע הקטן: $18 + 21 + 27 + 9 = \underline{75}$

המספרים המתאימים בריבועים האחרים הם: $24 + 28 + 36 + 12 = \underline{100}$ בריבוע הבינוני,

ו־$30 + 35 + 45 + 15 = \underline{125}$ בריבוע הגדול.

ואכן: $75^2 + 100^2 = 125^2$ (בדוק) !!!

אם ניקח, למשל, את סכום כל התאים נקבל את השלשה: $135^2 + 180^2 = 225^2$ (בדוק) !!!

מ ק ס י ם ! ! !

מספר מחזורי

מספר מחזורי הוא מספר טבעי שמכפלתו בכל אחד מהמספרים 1 עד מספר הספרות שלו, מורכבת מספרות המספר עצמו ובאותו סדר, בהסתכלות על ספרות המספר סדורות במעגל.

דוגמה: $142,857$

$$142,857 \times 1 = 142,857$$
$$142,857 \times 2 = 285,714$$
$$142,857 \times 3 = 428,571$$
$$142,857 \times 4 = 571,428$$
$$142,857 \times 5 = 714,285$$
$$142,857 \times 6 = 857,142$$
$$142,857 \times 7 = 999,999$$

שימו לב: $\frac{1}{7} = 0.142857\ 142857\ 142857\ \ldots$.

עוד דוגמה: $0,588,235,294,117,647$.

$$0,588,235,294,117,647 \times 1 = 0,588,235,294,117,647$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 2 = 1,176,470,588,235,294$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 3 = 1,764,705,882,352,941$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 4 = 2,352,941,176,470,588$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 5 = 2,941,176,470,588,235$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 6 = 3,529,411,764,705,882$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 7 = 4,117,647,058,823,529$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 8 = 4,705,882,352,941,176$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 9 = 5,294,117,647,058,823$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 10 = 5,882,352,941,176,470$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 11 = 6,470,588,235,294,117$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 12 = 7,058,823,529,411,764$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 13 = 7,647,058,823,529,411$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 14 = 8,235,294,117,647,058$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 15 = 8,823,529,411,764,705$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 16 = 9,411,764,705,882,352$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 17 = 0,588,235,294,117,647$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 17 = 9,999,999,999,999,999$$

שימו לב: $\frac{1}{17} = 0.0588235294117647\ 0588\ \ldots$.

מִרְשָׁם להכנת יין: נכנס סוד - יצא יין . . .

ועוד דוגמה: $052,631,578,947,368,421$.

$$
\begin{aligned}
052,631,578,947,368,421 \times 1 &= 052,631,578,947,368,421\\
052,631,578,947,368,421 \times 2 &= 105,263,157,894,736,842\\
052,631,578,947,368,421 \times 3 &= 157,894,736,842,105,263\\
052,631,578,947,368,421 \times 4 &= 210,526,315,789,473,684\\
052,631,578,947,368,421 \times 5 &= 263,157,894,736,842,105\\
052,631,578,947,368,421 \times 6 &= 315,789,473,684,210,526\\
052,631,578,947,368,421 \times 7 &= 368,421,052,631,578,947\\
052,631,578,947,368,421 \times 8 &= 421,052,631,578,947,368\\
052,631,578,947,368,421 \times 9 &= 473,684,210,526,315,789\\
052,631,578,947,368,421 \times 10 &= 526,315,789,473,684,210\\
052,631,578,947,368,421 \times 11 &= 578,947,368,421,052,631\\
052,631,578,947,368,421 \times 12 &= 631,578,947,368,421,052\\
052,631,578,947,368,421 \times 13 &= 684,210,526,315,789,473\\
052,631,578,947,368,421 \times 14 &= 736,842,105,263,157,894\\
052,631,578,947,368,421 \times 15 &= 789,473,684,210,526,315\\
052,631,578,947,368,421 \times 16 &= 842,105,263,157,894,736\\
052,631,578,947,368,421 \times 17 &= 894,736,842,105,263,157\\
052,631,578,947,368,421 \times 18 &= 947,368,421,052,631,578\\
052,631,578,947,368,421 \times 19 &= 999,999,999,999,999,999
\end{aligned}
$$

שימו לב: $\frac{1}{19} = 0.052631578947368421\ 05263\ .\ .\ .$

בדוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{7}$ **. מספר ספרותיו** $7 - 1 = 6$.

ומכפלתו ב- 7 **היא מספר המורכב מ-** 7 **פעמים הספרה** '9' .

בדוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{17}$ **. מספר ספרותיו** $17 - 1 = 16$.

ומכפלתו ב- 17 **היא מספר המורכב מ-** 17 **פעמים** '9' .

בדוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{19}$ **. מספר ספרותיו** $19 - 1 = 18$.

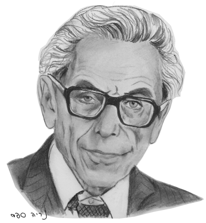
ומכפלתו ב- 19 **היא מספר המורכב מ-** 19 **פעמים** '9' .

ההשערה היא שיש אינסוף מספרים כאלה, אבל אין לכך הוכחה עדיין.

אמונה טפלה

*פרופסור **נילס בוהר** (1885-1962) היה פיסיקאי דני ממוצא יהודי, מדען גרעין, חתן פרס נובל לפיסיקה (1922).*
במשרדו היתה תלוית פרסת סוס שאמונה טפלה מייחסת לה הגנה מפני 'עין הרע'.
כשנשאל על-ידי מבקר נדהם האם הוא מאמין באותה אמונה טפלה,
השיב בוהר שהוא בוודאי אינו מאמין בכך, אבל הוא שמע שזה עוזר גם אם אתה אינך מאמין . . .

פול אֶרדֶש - סיפורו של נזיר מתמטי



פול ארדש, יהודי הונגרי, 1913–1996, עילוי מתמטי. שני הוריו היו מורים למתמטיקה. בגיל שלוש כבר הכפיל בע"פ מספרים בני שלוש ספרות. אז גם גילה את קיומם של המספרים השליליים. בגיל 21 קיבל תואר ד"ר במתמטיקה מאוניברסיטת בודפשט. היה חבר בסגל המתמטי במנצ'סטר, אנגליה. עם פרוץ מלחמת העולם השניה היגר לארה"ב, המקום הבטוח ליהודים באותה עת.

ארדש הקדיש את כל חייו למתמטיקה עד כדי איבוד ענין בכל תענוגות העולם. גם כשמת, בגיל 83, 1996, היה זה עת עמל על משוואה. ארדש היה רווק, צרך גלולות קפאין, אספרסו ואפילו אמפטינים (סוג של סם) ע"מ להגביר את יכולתו האינטלקטואלית. הוא היה חסר רכוש כלשהו מכיון שלדבריו 'נכסים הם מטרד'. לא היה לו בית, מכונית או חשבון בנק. היתה לו מזוודה קטנה, בה ארז את כל מלבושיו. כל מלבושיו היו ממשי בגלל רגישותו הפיזית למגע כלשהו. את ידיו רחץ עשרות פעמים ביום.

ארדש היה הדמות הקלאסית של הפרופסור המפוזר. הוא היה חותך פירות עם החלק הקהה של הסכין ומלכלך את סביבתו. בגיל 21 מרח בפעם הראשונה חמאה על פרוסת לחם בעצמו. עד אז היו עושות לו זאת אמו או המשרתת. רק בגיל 11 שרך לראשונה את נעליו בעצמו, ועדיין התקשה בקשירת שרוכי נעליו. לא פעם נעזר לשם כך בחבריו. היתה לו הליכה מוזרה, כשל קוף. גבו היה כפוף וזרועותיו מתנפנפות. הליכתו היתה מהירה מאוד. לעיתים היה רץ לעבר קיר, נעצר מולו בפתאומיות, מסתובב ורץ חזרה. פעם החמיץ את עצירתו מול הקיר, פגע בו ונפגע. לא פעם איבד את דרכו. הוא איבד את ראייתו באחת מעיניו מכיון שסרב לקבל טיפול רפואי מחשש לאיבוד הזמן שבו עסק במתמטיקה. רק לאחר התעקשותם של אחד מידידיו המתמטיקאים ואשתו הסכים לניתוח השתלת קרנית. מתמטיקאי מממפיס הוזעק לחדר הניתוח על מנת שארדש יוכל לשוחח איתו בנושאים מתמטיים בזמן הניתוח. כשהחלים מהתקף לב שוכן בבית חולים עם חדר גדול על מנת להכיל את כל מבקריו. ארדש ניהל בחדרו שלוש שיחות מתמטיות בעת ובעונה אחת, בשלוש שפות, עם שלוש קבוצות שונות ששהו בחדרו: בהונגרית, בגרמנית ובאנגלית. במעמד זה דרש מהרופאים שבאו לבודקו לחזור רק לאחר מספר שעות. הם נענו לו.

הוא ניהל התכתבות עניפה עם מתמטיקאים רבים בעולם. תחילת מכתב טיפוסי שלו: "הואה (מתמטיקאי סיני) היקר, נניח ש־p הוא מספר ראשוני אי זוגי . . . "

בשנות החמישים, בתקופה בה רדפו בארה"ב את אוהדי הקומוניזם ('מקארתיזם', ע"ש הסנטור מקארטי), התעמת עם פקידים אמריקאים שתיחקרו אותו על דעותיו בנושא. כשהביע דעה ניטרלית, תוך ציון ערכו של קארל מרקס, נשללה ממנו אשרת הכניסה לארה"ב. את סוף שנות החמישים העביר בישראל.

הוא התקיים מהרצאות במתמטיקה, אותן הירצה ברחבי העולם. בביקוריו בחו"ל התאכסן אצל מתמטיקאים מקומיים. את דמי האירוח שילם בהברקותיו המתמטיות. ארדש השפיע לא מעט על המתמטיקה של המאה העשרים. הוא גילה את המספרים הדיסקרטיים, שהם הבסיס למדעי המחשב. היה אשף בתורת המספרים ובכללי המספרים הראשוניים.

פעם הוא ראה על הלוח בעיה באנליזה פונקציונאלית (ענף מתמטי), תחום שארדש לא ידע עליו מאומה. הוא קרא את המשפט המתמטי הקשור בבעיה זו, שאל מספר שאלות על הסימונים המתמטיים שבבעיה, ואז ללא כל מאמץ כתב פתרון בן שתי שורות. על הבעיה הזו עבדו קודם לכן שני אנליסטים וחיברו לה פתרון שאורכו 30 עמודים(!). הוא כתב לבדו, או עם שותפים למעלה מ־$1,500$ מאמרים. כפותר חידות מעולה (ולא כמחבר תיאוריות), הוא זכה במספר גדול של פרסים, ביניהם מהנחשבים ביותר כמו פרס קול וולף (המוענק בישראל). כשבעיה הטרידה אותו הוא היה מוכן להציע עבורה הרבה כסף למי שיראה לו את פתרונה. ארדש היה כל כך מוערך מבחינה מקצועית אצל המתמטיקאים, עד כי התפתח ביניהם דירוג של מי שהשתתף איתו בכתיבת מאמר. מי שכתב איתו מאמר קיבל דירוג של 'ארדש ראשון'. מי שפרסם מאמר עם מישהו שפרסם מאמר עם ארדש קיבל את הדירוג 'ארדש 2'. כ־$4,500$ מתמטיקאים הם בעלי דירוג 'ארדש 2', ביניהם אלברט איינשטיין. הדירוג מגיע היום עד 'ארדש 7'. למי שמעולם לא פירסם מאמר מתמטי כלשהו יש 'ארדש ∞'.

בשבילך - 100

כיצד ניתן להגיע למספר 100 ע"י שימוש בכל הספרות מ־1 עד 9 (לא כולל 0),
פעם אחת בכל ספרה, ועוד לפי הסדר שלהן (. . . 3 ,2 ,1) ?
לא להאמין, אבל יש לשאלה זו לא מעט תשובות:

$$1+2+3+4+5+6+7+8\times 9=100$$

$$1+2\times 3+4\times 5-6+7+8\times 9=100$$

$$1+2\times 3+4+5+67+8+9=100$$

$$1\times 2+34+56+7-8+9=100$$

$$1+2+34-5+67-8+9=100$$

$$12+3-4+5+67+8+9=100$$

$$12-3-4+5-6+7-89=100$$

$$123+4-5+67-89=100$$

$$123-4-5-6-7+8-9=100$$

$$123+45-67+8-9=100$$

$$123-45-67+89=100$$

$$-(12+34-56)\times(-7+8+9)=100$$

$$(1+2-3-4)\times(5-6-7-8-9)=100$$

$$1-2\times 3+4\times 5+6+7+8\times 9=100$$

$$(1+2)^{3}+4\times 5+6+7\times 8-9=100$$

אם נרשה סדר ספרות יורד - יש לנו פתרון נוסף:

$$98-76+54+3+21=100$$

באנגליה התקימה פעם תחרות שבה התבקשו המתחרים למצוא תשובות לשאלה זו.
ילדה אחת, בת 13, הציעה 56 תשובות שונות! אחת מהן היא זו:

$$1^{2345}+6\times(7+8)+9=100$$

אפשרויות נוספות:

$$(12-(3+4)+5)^{-6+7-8+9}=100$$

$$\left(\sqrt[1+2]{-3+4}\right)^{5}+6\times(7+8)+9=100$$

$$\left(1+\left(\sqrt[2]{3}\right)^{4}+5\right)\times 6-7+8+9=100$$

אם נאפשר שימוש בשברים, ונוותר סדר הספרות - נקבל את האפשרויות הבאות:

$$24\frac{3}{6}+75\frac{9}{18}=100 \qquad 47\frac{3}{6}+52\frac{9}{18}=100 \qquad 57\frac{3}{6}+42\frac{9}{18}=100 \qquad 1\frac{6}{7}+3+95\frac{4}{28}=100$$

$$74\frac{3}{6}+25\frac{9}{18}=100 \qquad 95\frac{3}{7}+4\frac{16}{28}=100 \qquad 98\frac{3}{6}+1\frac{27}{54}=100 \qquad 94\frac{1}{2}+5\frac{38}{76}=100$$

סיווג שאלות המבחנים

סוגריים מרובעים - מספר עמוד. כל שאר המספרים - מספרי שאלות. את הסיווג הכין ***שרון חיים***.

גאומטריה אנליטית-
נקודות וישרים [1]

משולשים
- משולש: 5, 25, 26, 28
- משולש שווה-שוקיים: 12
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים: 4, 9, 13
- תיכון: 25
- נקודת מפגש הגבהים במשולש: 2

מרובעים
- מרובע: 18, 22, 23, 29
- דלתון: 24
- מקבילית: 3, 6, 16, 20
- מלבן: 1, 7, 15, 21
- מעוין: 8, 11, 17, 27
- ריבוע: 4, 9, 10, 14
- טרפז: 19

מצולעים
- מחומש: 24

טריגונומטריה במישור-
ללא מעגל [147]

ללא פרמטר

4, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 30, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 48, 49

עם פרמטר

1, 2, 3, 5, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 38, 41, 47

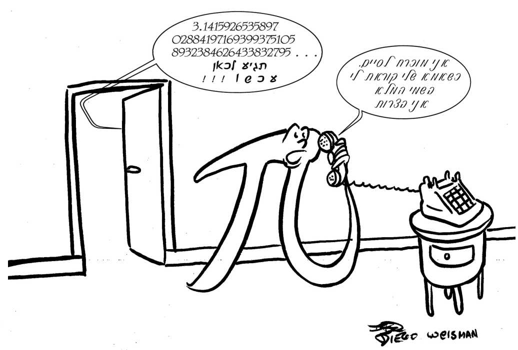
משולשים
- משולש: 2, 10, 39, 43, 45
- משולש קהה-זווית: 49
- משולש ישר-זווית: 7, 42
- משולש שווה-שוקיים: 1, 6, 12, 15, 17, 22, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 40, 46, 48
- משולש שווה-צלעות: 20, 24

נקודות וקווים מיוחדים במשולש
- אמצע קטע: 16
- תיכון: 7
- נקודת מפגש התיכונים במשולש: 37
- נקודת מפגש חוצי-הזוויות במשולש: 12

מרובעים
- מרובע: 42, 48
- מקבילית: 8, 14, 21, 26, 34, 41, 47
- מלבן: 3, 4, 11, 13, 38
- מעוין: 16, 18, 28, 32
- ריבוע: 5, 19, 23, 24, 25, 29, 33, 36, 40
- טרפז: 4, 9, 13, 18, 44
- טרפז שווה-שוקיים: 30

הבעה באמצעות פרמטר

1, 2, 3, 5, 11, 12, 14, 15, 16, 20, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 38, 41, 42

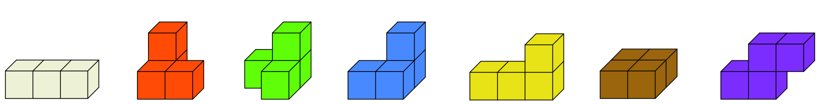


לפניך ששה גופים שנפח כל אחד מהם הוא 4 יחידות ועוד גוף אחד שנפחו שלוש יחידות.

בסה"כ - 27 יחידות.

נפח קוביה שמימדיה $t \times 3 \times 3$ הוא 27 יחידות.

הוכח שלא ניתן לבנות קוביה מהחלקים הנתונים, למרות שסכום נפחיהם הוא נפח הקוביה הנדרשת.



המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.

38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.

41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.

45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).

47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.

48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.

49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.

52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.

53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.

54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.

57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.

64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.

66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.

67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.

71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.

73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).

74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.

75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. **(99–101 לחמש יחידות בלבד)**

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180^\circ(n-2)$.

אם תכניס את הספרה '9' פעם אחת, לכל מקום שתבחר במספר הראשוני $593,103,437$ - תקבל מספר ראשוני

נוסחאון הבגרות לארבע יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- חזקות: $(a \neq 0 \ , \ b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \ ; \ a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ הם:

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

קוסם הוא אדם ישר: הוא מבטיח לרמות אותך, והוא אכן מרמה אותך.

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר
ההסתברות להצלחה היא p: $P_n(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, - נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל־b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל־c)
- גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: $V = B\cdot h$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = P\cdot h$ (P - היקף הבסיס , h - גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת
של u לפי x (נגזרת פנימית) ו־$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי) , $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז: $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$