גידול ודעיכה

שאלות

1. (5 יח׳ , קיץ תש״ן - 90)

׳זמן מחצית החיים׳ של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית. נגדיר ׳זמן רבע חיים׳ של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית.

זמן רבע החיים של חומר א שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב. אם מ־ 100_{gr} של חומר א נשארו 80_{gr} כעבור 4 שנים, מאיזו כמות של חומר ב יישארו 80_{gr} כעבור 4 שנים? **(5)**

2. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ג - 93)

כמות הדגים בבְרֵכת דגים גדלה ב־$p\%$ בכל שבוע.

הכמות ההתחלתית של הדגים היא k טון.

כעבור x שבועות מכרו k טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.

כעבור x שבועות נוספים היו בבְרֵכה $2k$ טון דגים. בטא את x באמצעות p . **(5)**

3. (004 , קיץ ס״ו - 2006 , מועד ב)

אדם הפקיד בשני בנקים A ו־ B, באותו יום את <u>אותו סכום כסף</u>.

בכל אחד מהבנקים הסכום גדֵל באחוז קבוע בכל שנה.

כעבור 7 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק A - 6580 ש׳, ובבנק B - 6150 ש׳.

כעבור 3 שנים נוספות היה הסכום בבנק A - 7402.5 ש׳.

מצא בכמה אחוזים גדֵל כל שנה סכום הכסף: **א.** בבנק A **ב.** בבנק B **(5)**

4. (004 , סתיו ס״ז - 2006 , מועד לוחמים)

א. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים.

(1) כעבור כמה זמן תקטן כמות החומר עד ל־ 20% מן הכמות ההתחלתית?

(2) אם כיום נותרה במעבדה כמות של 350_{gr} מחומר רדיואקטיבי זה,

איזו כמות תִוותר ממנו בעוד שנתיים? **(6)**

תשובות

1. 89.44_{gr}

2. $x = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

3. **א.** 4% **ב.** 3%

4. **א.** **(1)** $t = 6.97_{years}$ **(2)** $m_2 = 220.49_{gr}$

גידול ודעיכה - פתרונות

הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot q^t \quad , \quad q = 1 \pm \frac{p}{100}$

1. q_1 - קצב הדעיכה של חומר א , q_2 - קצב הדעיכה של חומר ב

t - משך "זמן רבע חיים" של חומר א , x - כמות חומר א שממנו ישארו 80_{gr} עבור 4 שנים

$$m_{0(\text{א})} = 100 \quad \Rightarrow \quad 80 = 100 \cdot q_1^4 \quad \Rightarrow \quad q_1^4 = 0.8 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \sqrt[4]{0.8} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.9457$$

כעבור t יחידות זמן ישאר מ- 1_{gr} של חומר א 0.25_{gr} :

$$1 \cdot 0.9457^t = 0.25 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.9457} = 24.8307$$

כעבור t יחידות זמן ישאר מ- 1_{gr} של חומר ב 0.5_{gr} :

$$1 \cdot q_2^t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad q_2^{24.8307} = 0.5 \;\; /(\;\;)^{\frac{1}{24.8307}} \quad \Rightarrow \quad q_2 = e^{-0.0279} = 0.9725$$

$$80 = x \cdot q_2^4 \quad \Rightarrow \quad x \cdot 0.9725^4 = 80 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{80}{0.9725^4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 89.44_{gr}}$$

---

2. כמות הדגים כעבור x שבועות לפני המכירה: $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$

כמות הדגים מיד לאחר המכירה: $k(1 + \frac{p}{100})^x - k$

כמות הדגים כעבור x שבועות נוספים לאחר המכירה: $[k(1 + \frac{p}{100})^x - k] \cdot (1 + \frac{p}{100})^x = \underbrace{2k}_{\text{נתון}}$

$$\underbrace{(1 + \frac{p}{100})^x = t}_{\text{סימון}} \quad \Rightarrow \quad (kt - k) \cdot t = 2k \quad \Rightarrow \quad k\,t^2 - k\,t - 2k = 0 \;\; / : k \quad \Rightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm 3}{2} \;\; , \;\; t > 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 + \frac{p}{100})^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{\ln 2}{\ln (1 + \frac{p}{100})} = \log_{(1+\frac{p}{100})} 2}$$

---

3. א. נסמן: x - סכום הכסף שהופקד , q_1 - שיעור הגידול בבנק A , q_2 - שיעור הגידול בבנק B

$$(I) \;\; x \cdot q_1^7 = 6580$$

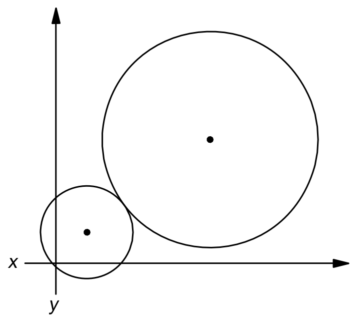
$$(II) \;\; x \cdot q_1^{10} = 7402.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{(II)}{(I)} = q_1^3 = \frac{7402.5}{6580} = 1.125 \;\; / \sqrt[3]{\;\;} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1.04 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 4\%}$$

ב.

$$(I) \;\; x \cdot 1.04^7 = 6580 \;\; / : 1.04^7 \quad \Rightarrow \quad x = 5,000_{sh}$$

$$5000 \cdot q_2^7 = 6150 \quad \Rightarrow \quad q_2^7 = \frac{6150}{5000} = 1.23 \;\; /(\;\;)^{\frac{1}{7}} \quad \Rightarrow \quad = 1.03 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = 3\%}$$

24. (קיץ תשע״ב - 2012 , מועד א)



שני מעגלים I ו־ II משיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן:

$$I.\ \ (x-2)^2+(y-2)^2=9$$

$$II.\ \ (x-10)^2+(y-8)^2=R^2$$

א. מבין הנקודות שעל מעגל II , מצא את שיעורי הנקודה שמרחקה מציר x הוא הקצר ביותר.

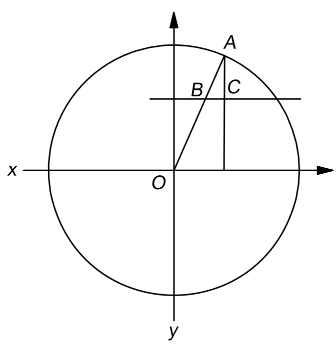
ב. ישר משיק לשני המעגלים בנקודת המגע של המעגלים.

הישר הוא מקום גאומטרי של הנקודות שמרחקן ממרכז מעגל I שווה למרחקן מנקודה A .

(1) מצא את השיעורים של נקודת המגע של המעגלים. **(40)**

(2) מצא את השיעורים של הנקודה A . נמק.

25. (קיץ תשע״ב - 2012 , מועד ב)



נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=49$.

מנקודה A שעל המעגל מורידים אנך לציר x.

B היא נקודה על רדיוס המעגל OA

כך ש־ $\frac{AB}{BO}=\frac{3}{4}$ (O - ראשית הצירים).

דרך B מעבירים ישר המקביל לציר x.

הישר המקביל והאנך נפגשים בנקודה C.

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של הנקודות C הנוצרות באופן שתואר.

ב. המקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א, חותך את ציר y בנקודות D ו־E.

דרך נקודה P שעל המקום הגאומטרי (השונה מהנקודות D ו־E) העבירו את הישרים PD ו־PE,

החותכים את ציר x בנקודות F ו־G בהתאמה.

הוכח כי המכפלה $OF \cdot OG$ היא גודל קבוע שאינו תלוי בבחירת הנקודה P . **(41)**

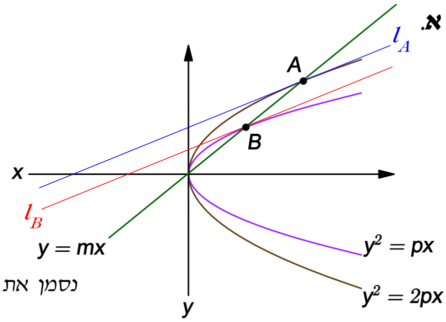
אמריקה - ארץ האפשרויות הבלתי מוגבלות. ישראל - ארץ המְגֻבָּלות הבלתי אפשריות (אפרים קישון)

תשובות

24. **א.** $(10,1)$ **ב.** **(1)** $(4.4,3.8)$ **(2)** $A(6.8,5.6)$

25. **א.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ (אליפסה) **ב.** $(\surd)$ $OF \cdot OG=49$

11. א.



$\underline{A:}\ y^2 = 2px \ ,\ y = mx \quad \Rightarrow \quad (mx)^2 = 2px$

$m^2x^2 = 2px \underset{\uparrow}{\Rightarrow} m^2x = 2p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2p}{m^2}$

(מהנתון) $x_A \neq 0$

$y = m \cdot \frac{2p}{m^2} = \frac{2p}{m} \quad \Rightarrow \quad A(\frac{2p}{m^2}\ ,\ \frac{2p}{m})$

נסמן את שיפוע המשיק ב- a.

נוסחת הישר המשיק לפרבולה ב- (x_0, y_0) :

$yy_0 = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{y_0}x + \frac{px_0}{y_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{y_0} = \frac{p}{\frac{2p}{m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a_A = m}$

$\underline{B:}\ y^2 = px \ ,\ y = mx \quad \Rightarrow \quad (mx)^2 = px \quad \Rightarrow \quad m^2x^2 = px \underset{\uparrow}{\Rightarrow} m^2x = p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{m^2}$

(מהנתון) $x_B \neq 0$

$y = m \cdot \frac{p}{m^2} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad B(\frac{p}{m^2}\ ,\ \frac{p}{m})$

שיפוע הישר המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ ב- (x_0, y_0) הוא $\frac{p}{y_0}$.

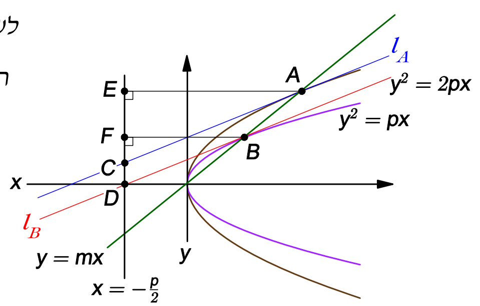
הפרבולה $y^2 = px$ ניתנת להצגה: $y^2 = 2 \cdot \frac{p}{2}\ x$ והשיפוע יהיה: $\frac{p}{2\,y_0}$.

$a = \frac{p}{2\,y_0} = \frac{p}{2 \cdot \frac{p}{m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a_B = m} \quad \rightarrow \quad a_A = a_B \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{l_A \parallel l_B} \quad (\checkmark)$

ב.

לשני המשולשים בסיס משותף - CD.

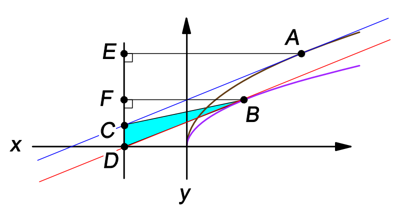
הגבהים לבסיס זה הם FB ו- EA .



$\frac{S_{\triangle DCA}}{S_{\triangle DCB}} = \frac{\frac{CD \cdot EA}{2}}{\frac{CD \cdot FB}{2}} = \frac{EA}{FB} = \frac{3}{2}$

$EA = x_A - x_E = \frac{2p}{m^2} - (-\frac{p}{2}) = p(\frac{2}{m^2} + \frac{1}{2})$

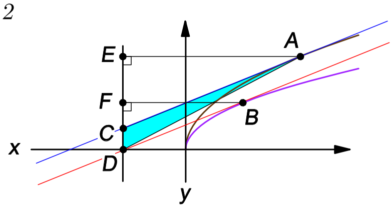
$FB = x_B - x_F = \frac{p}{m^2} - (-\frac{p}{2}) = p(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2})$



$\frac{EA}{FB} = \frac{p(\frac{2}{m^2} + \frac{1}{2})}{p(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{2}{m^2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4+m^2}{2+m^2} = \frac{3}{2}$

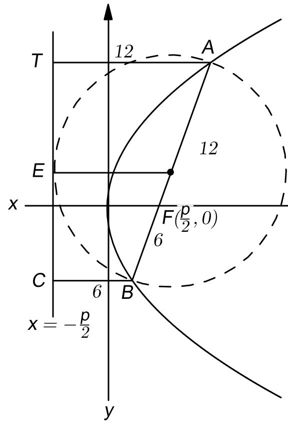
$\Rightarrow \quad 8 + 2m^2 = 6 + 3m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2$

$m > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m = \sqrt{2}}$



קפיטליזם - חלוקה לא שווה של העושר. קומוניזם - חלוקה שווה של העוני.

12. א.



$(1)\ AF = AT\ ,\ \ BF = BC \quad \Rightarrow \quad AF + FB = AT + BC$

$\Rightarrow \quad \mathbf{AB = AT + BC}\ \ (\checkmark)$

ב.

$ME \parallel AT\ ,\ \ AM = MB\ (= R)$

$\Rightarrow^{(2)}\ \ EM = \frac{AT+BC}{2} =^{(3)} \frac{AB}{2} = \frac{2R}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EM = R}\ \ (\checkmark)$

ג. (1)

$(1)\ BF = BC =^{(4)} 6_{cm}\ ,\ \ (1)\ AF = AT =^{(4)} 12_{cm}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{AF : FB = 2 : 1}$

(2)

$TC \equiv \{x = -\frac{p}{2}\}\ ,\ \ BC = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_B = -\frac{p}{2} + 6}$

(3)

$(5)\ x_A = -\frac{p}{2} + 12\ ,\ \ \frac{AF}{FB} = \frac{2}{1}\ ,\ \ F(\frac{p}{2},0)$

$(6)\ x_F = \frac{p}{2} = \frac{1\cdot(12-\frac{p}{2})+2\cdot(6-\frac{p}{2})}{3} = \frac{12-\frac{p}{2}+12-p}{3} \quad /\cdot 6$

$3p = 48 - 3p \quad \Rightarrow \quad 6p = 48 \quad \Rightarrow \quad p = 8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y^2 = 16x}$

---

(1) מרחק כל נקודה על הפרבולה מהמוקד (F) שווה למרחקה מהמדריך (TC) (הגדרת פרבולה.)

(2) EM קטע אמצעים בטרפז (חוצה שוק ומקביל לבסיסים) שווה למחצית סכום אורכי הבסיסים

(3) מסעיף א (4) נתון (5) משיקול זהה לזה שבסעיף ג(2) (6) חלוקת קטע ביחס נתון

אם נסובב את הספרה '1' ב־ 180° - נקבל שוב את הספרה '1' , כך גם עבור הספר '8' .
סיבוב כזה של הספרה '6' - יתן את '9' , מ־ '9' נקבל את '6' .
בריבוע הקסם שלהלן, משתתפים מספרים שבהן רק הספרות 9-6-8-1 .
אם תסובבו את הריבוע ב־ 180° - תקבלו שוב ריבוע קסם עם אותו סכום - 264.

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

$\longrightarrow$

18	66	89	91
99	81	68	16
61	19	96	88
86	98	11	69

סכום כל פינה 2×2 בריבוע שווה ל־ 264 . כך גם הריבוע 2×2 המרכזי. כך גם ארבע הפינות של הריבוע.
ויש עוד צירופים סימטריים נוספים שסכומם 264 .

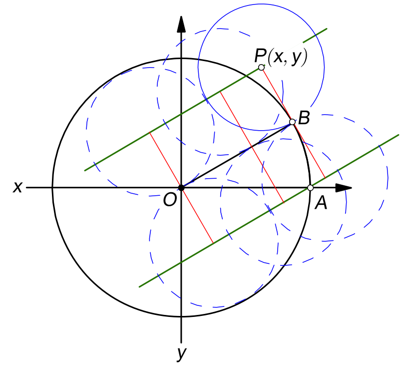
22. א. <u>סימון:</u> תהי $P(x,y)$ נקודה במקום הגאומטרי המבוקש.

$x^2+y^2=100 \quad \Rightarrow \quad R=10$

$\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{2}R=5 \quad \Rightarrow \quad d(P \leftrightarrow OB)=5$

$m_{OB}=tg\ 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad y_{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$OB: \quad \sqrt{3}\,x-3y=0$



$d(P \leftrightarrow OB)=\frac{|\sqrt{3}\,x-3y|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=\frac{|\sqrt{3}\,x-3y|}{\sqrt{12}}=5$

$\sqrt{3}\,x-3y=\pm 5\sqrt{12}=\pm 5\cdot 2\sqrt{3} \quad /:\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}\,y=\pm 10 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x-\sqrt{3}\,y\pm 10=0}$

<u>הערה:</u> הדרישה היא למרכזי המעגלים המשיקים <u>לישר</u> OB ולאו דוקא <u>לקטע</u> OB.

אם הדרישה (או הכוונה) היתה דוקא <u>לקטע</u> OB אז יש להוסיף את התחום:

$-2.5 \le x \le 7.5$ עבור $x-\sqrt{3}\,y+10=0$, $2.5 \le x \le 12.5$ עבור $x-\sqrt{3}\,y-10=0$.

ראה ציור. השלם את הנימוק במקרה זה.

ב.

המרובע המתקבל הוא מלבן:

$PS \parallel AT$. $\angle P=\angle T=90^{\circ}$ (היקפיות על קוטר).

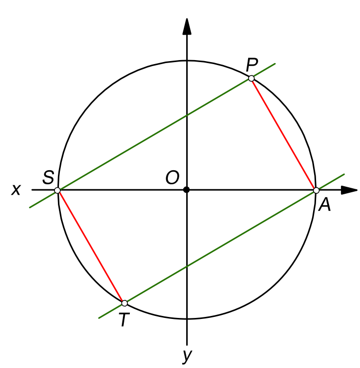
$\angle T=\angle S=90^{\circ}$, $\angle A=\angle P=90^{\circ}$ (חד־צדדיות).

מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן.

את רוחב המלבן יש לנו כבר: $AP=5+5=10$.

$PS=\sqrt{SA^2-PA^2}=\sqrt{20^2-10^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$

$S_{APST}=10\sqrt{3}\cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S=100\sqrt{3}}$ **(יחידות ריבועיות)**



המספר: $1,799,999,999,999,999,999$ הוא מספר ראשוני.

קל לזכור אותו: רושמים 17 ואחריו 17 פעמים את הספרה 9.

24. (חורף תשע"א - 2011)

א. z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

z_1 ו־ z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו־ z_3 נמצא ברביע השלישי.

נסמן $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $z_1 = r_1$.

הבע את המנה $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ באמצעות הערכים המוחלטים של z_1 , z_2 ו־ z_3 . **(60)**

25. (קיץ תשע"ב - 2012 , מועד א)

א. נתונה המשוואה $z^3 = w$.

נתון כי אחד הפתרונות של המשוואה הוא $z = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **(61)**

הראה כי מכפלה של כל שני פתרונות של המשוואה גם היא פתרון של המשוואה.

26. (קיץ תשע"ב - 2012 , מועד ב)

א. z_1 ו־z_2 הם מספרים מרוכבים שונים מאפס. נתון כי $\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר מדומה טהור.

הוכח כי ישר העובר דרך הנקודה z_1 וראשית הצירים

מאונך לישר העובר דרך הנקודה z_2 וראשית הצירים. **(61)**

(הנקודות z_1 ו־z_2 מייצגות במישור גאוס את המספרים הנתונים.)

27. (חורף תשע"ג - 2013)

א. נתונים המספרים המרוכבים z המקיימים: $|z-3i| = 1$.

(1) סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי של המספרים z . נמק.

(2) על פי הסרטוט שסרטטת בתת־סעיף א(1), **(62)**

סרטט באותה מערכת צירים את המקום הגאומטרי של המספרים $\bar{z}$.

(3) המספר $z_0 = 1+iy$ נמצא על המקום הגאומטרי של המספרים z שסרטטת ב־ א(1).

מצא את המרחק בין הנקודה המייצגת את z_0 ובין הנקודה המייצגת את $\overline{z_0}$.

ב. אינו קשור לפרק זה.

במקום להצטער שלשושנה יש קוצים - שְׂמח שלקוצים יש שושנה.

תשובות

24. א. $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \frac{|z_1|+|z_3|}{|z_2|+|z_3|}$

27. א. (1) $x^2+(y-3)^2 = 1$ **(3)** $x^2+(y+3)^2 = 1$ **(3)** $z_0\overline{z_0} = 6$ (יחידות אורך)

23. א.

$$2z^2-(m-2)^2z-\frac{1}{8}i=0$$

$$\underline{\triangle=0:}\ \ (m-2)^4+i=0 \quad\Rightarrow\quad (m-2)^4=-i=\text{cis}\,(-90^\circ)$$

$$\Rightarrow\quad (m-2)_1=\text{cis}\,(\tfrac{-90^\circ}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_1=2+cis\,(-22.5^\circ)=2.92-0.38\,i}$$

$$\Rightarrow\quad (m-2)_2=\text{cis}\,(\tfrac{-90^\circ+360^\circ}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_2=2+cis\,67.5^\circ=2.38+0.92\,i}$$

$$\Rightarrow\quad (m-2)_3=\text{cis}\,(\tfrac{-90^\circ+360^\circ\cdot 2}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_3=2+cis\,157.5^\circ=1.076+0.38\,i}$$

$$\Rightarrow\quad (m-2)_4=\text{cis}\,(\tfrac{-90^\circ+360^\circ\cdot 3}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_4=2+cis\,247.5^\circ=1.62-0.92\,i}$$

ב. החלק הממשי בכל הפתרונות חיובי: $2+\cos\alpha>0 \quad\Rightarrow\quad -1\le\cos\alpha\le 1$

בדיקת החלק המדומה: $\sin(-22.5^\circ)<0\ ,\ \sin 67.5^\circ>0\ ,\ \sin 157.5^\circ>0\ ,\ \sin 247.5^\circ<0$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{m_2=2.38+0.92\,i\ \ ,\ \ m_3=1.076+0.38\,i}$$

ג. (1)-(2)

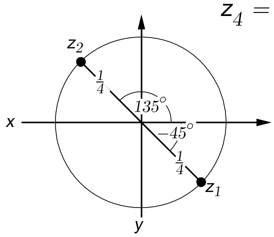
$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}\ \ ,\ \ \triangle=0 \quad\Rightarrow\quad z=-\frac{b}{2a}=\frac{(m-2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow\quad z_1=\tfrac{1}{4}(\text{cis}\,(-22.5^\circ))^2=\tfrac{1}{4}\text{cis}\,2\cdot(-22.5^\circ)=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,(-45^\circ)$$

$$z_2=\tfrac{1}{4}(\text{cis}\,67.5^\circ)^2=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,2\cdot 67.5^\circ=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,135^\circ$$

$$z_3=\tfrac{1}{4}(\text{cis}\,157.5^\circ)^2=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,2\cdot 157.5^\circ=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,315^\circ=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,(-45^\circ)=z_1$$

$$z_4=\tfrac{1}{4}(\text{cis}\,247.5^\circ)^2=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,2\cdot 247.5^\circ=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,495^\circ=\tfrac{1}{4}\ \text{cis}\,135^\circ=z_2$$



קיבלנו רק שני פתרונות, שהן שתי נקודות במישור גאוס.

נחבר כל אחד מהפתרונות עם ראשית הצירים.

הזווית המתקבלת בין שני הקטעים היא זווית שטוחה:

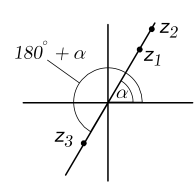
$45^\circ+135^\circ=180^\circ$.

קיבלנו, אם־כן, ישר העובר דרך ראשית הצירים, ברביעים II ו־ IV $\Leftarrow$ **$y=-x$** .

---

24. א.

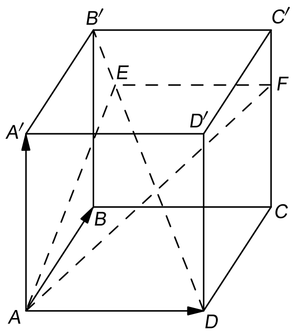
$$\arg z_1=\arg z_2=\alpha\ \ ,\ \ \arg z_3=180^\circ+\alpha\ \ ,\ \ z_1=r_1\ \text{cis}\,\alpha\ \ ,\ \ z_2=r_2\ \text{cis}\,\alpha$$



$$z_3=r_3\ \text{cis}\,(180^\circ+\alpha)=r_3\ (\cos(180^\circ+\alpha)+i\sin(180^\circ+\alpha))$$

$$=r_3\ (-\cos\alpha-i\sin\alpha)=-r_3\ \text{cis}\,\alpha$$

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{r_1\text{cis}\,\alpha+r_3\text{cis}\,\alpha}{r_2\text{cis}\,\alpha+r_3\text{cis}\,\alpha}=\frac{\text{cis}\,\alpha\,(r_1+r_3)}{\text{cis}\,\alpha\,(r_2+r_3)}=\frac{r_1+r_3}{r_2+r_3} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{|z_1|+|z_3|}{|z_2|+|z_3|}}$$



11. (חורף ס״ט - 2009 , מועד מיוחד) בקוביה שלפניך $ABCDA'B'C'D'$ נתון:

$\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה E נמצאת על האלכסון DB'

כך שמתקיים: $\vec{DE} = t\,\vec{DB'}$.

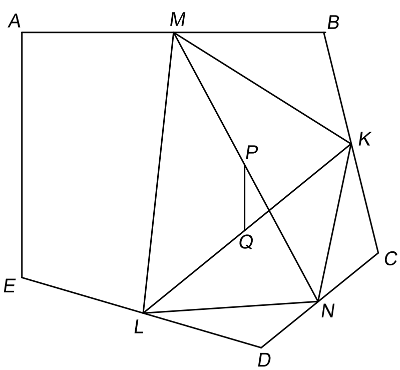
הנקודה F נמצאת על המקצוע CC'

כך שמתקיים: $\vec{CF} = t\,\vec{CC'}$.

א. הבע את הוקטור $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו־ t .

ב. הראה כי הוקטור $\vec{EF}$ מקביל למישור $ABCD$. **(75)**

ג. האם קיים ערך של t שעבורו האלכסון DB' מאונך למישור AEF ? נמק בעזרת חישובים.



12. (קיץ תש״ע - 2010 , מועד א) נתון מרובע $MKNL$.

P אמצע האלכסון NM , ו־ Q אמצע האלכסון KL .

א. הבע את $\vec{QP}$ בשני אופנים שונים,

והוכח כי: $\vec{QP} = \frac{1}{2}(\vec{KM} + \vec{LN})$.

ב. חסמו את המרובע $MKNL$ במחומש $ABCDE$,

כך שקדקודי המרובע M , K , N , L הם אמצעי

הצלעות AB , BC , CD , ED בהתאמה.

הוכח: $\vec{QP} \parallel \vec{EA}$, $|\vec{QP}| = \frac{1}{4}|\vec{EA}|$.

ג. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{EA} = \underline{v}$. נתון: $\vec{AG} = t\,\underline{u}$, $t > 0$, $\vec{QP} \perp \vec{AB}$, $|\underline{u}| = 5$, $|\underline{v}| = 4$.

מצא את הערך של t שעבורו הזווית בין הוקטור $\vec{EG}$ ובין הוקטור $\vec{QP}$ היא 60° .

(76)

תשובה של חיים ויצמן

חיים ויצמן (1874–1952), איש התנועה הציונית ונשיאה הראשון של מדינת ישראל.

מספר שנים לפני הצהרת בלפור שאל אותו חבר בית הלורדים האנגלי:

"מדוע אתם היהודים מתעקשים על פלשתינה, כאשר ישנן כל־כך הרבה מדינות לא־מפותחות בהן אתם יכולים להתיישב בנוחות רבה יותר?"

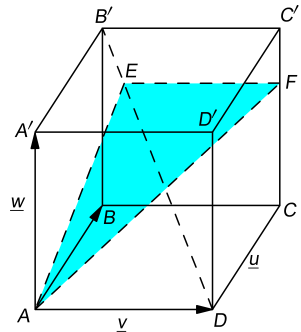
ענה לו ויצמן: "זה כמו שאני אשאל אותך מדוע נסעת בסוף השבוע שלושים קילומטר כדי לבקר את אמא שלך, כשיש כל כך הרבה זקנות שגרות ממש ברחוב שלך" . . .

תשובות

11. **א.** $\vec{AE} = t\,\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + t\,\underline{w}$ **ג.** לא

12. **א.** $\vec{QP} = \vec{QL} + \vec{LM} + \vec{MP} = \vec{QK} + \vec{KM} + \vec{ML} + \vec{LN} + \vec{NP}$ **ג.** $t = 1.386$

11. א.



$\vec{DE} = t\,\vec{DB'} = t\,(\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BB'}) = t\,(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})$

$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \underline{v} + t\,(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{\vec{AE} = t\,\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + t\,\underline{w}}$$

ב.

$\vec{CF} = t\,\vec{CC'} = t\,\underline{w}$

$\vec{EF} = \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{CF} = -t\,(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}) + \underline{u} + t\,\underline{w} \quad\Rightarrow\quad \vec{EF} = (1-t)\,\underline{u} + t\,\underline{v}$

הוקטורים $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$ פורסים את מישור $ABCD$.

$\vec{EF}$ הוא קומבינציה ליניארית של $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{\vec{EF} \parallel ABCD}$ $(\surd)$

<u>הערה:</u> עבור $t=0$ הישר EF מתלכד עם הישר DC ומוכל בבסיס $ABCD$.
עבור $t=1$ הישר EF מתלכד עם הישר $B'C'$ ומקביל לבסיס $ABCD$.

ג.

כל מקצועות הקוביה שוות זו לזו $\quad \underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{w}^2 \quad\Rightarrow\quad |\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}|$

$\underline{u} \perp \underline{v} \perp \underline{w} \quad\Rightarrow\quad \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0$

אם האלכסון DB' מאונך למישור AEF אזי הוא מאונך לכל ישר במישור, בפרט ל־ $\vec{EF}$ ול־ $\vec{AE}$.

נבדוק את התנאי לכך ש־ $\vec{DB'} \perp \vec{EF}$ ואחר נראה האם בתנאי זה מתקיים: $\vec{DB'}\cdot\vec{AE} = 0$.

$\vec{DB'} \perp \vec{EF} \quad\Rightarrow\quad \vec{DB'}\cdot\vec{EF} = 0 \quad\Rightarrow\quad (-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})\cdot((1-t)\underline{u} + t\underline{v}) = 0$

$-t\,\underline{v}^2 + (1-t)\,\underline{u}^2 = 0 \ \ /:\underline{u}^2 \underset{\underline{u}^2 = \underline{v}^2 \neq 0}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}} -t + 1 - t = 0 \quad\Rightarrow\quad 2t = 1 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{1}{2}$

$\vec{DB'}\cdot\vec{AE} = (-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})\cdot(t\,\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + t\,\underline{w}) \underset{t=\frac{1}{2}}{\overset{\uparrow}{=}} (-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})\cdot(\frac{1}{2}\,\underline{u} + \frac{1}{2}\,\underline{v} + \frac{1}{2}\,\underline{w})$

$= -\frac{1}{2}\,\underline{v}^2 + \frac{1}{2}\,\underline{u}^2 + \frac{1}{2}\,\underline{w}^2 \underset{\underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{w}^2}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}\,\underline{u}^2 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{DB'} \not\perp \vec{AE}$

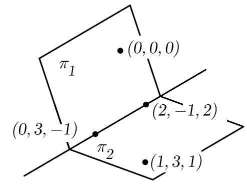
ולכן: **<u>אין</u> ערך של t שעבורו $\vec{DB'} \perp AEF$**

הסתברות מפתיעה

ההסתברות ששני אנשים מתוך 23 אנשים אקראיים, חוגגים יום הולדת באותו תאריך גבוהה מ־50% !

(0.5073)

.9



$\underline{\pi_1:}$ $ax+by+cz+d=0$

$(0,0,0) \Rightarrow d=0 \quad , \quad (0,3,-1) \Rightarrow 3b-c=0$

$\Rightarrow c=3b$

$(2,-1,2) \Rightarrow 2a-b+2c=0 \Rightarrow 2a-b+6b=0$

$2a=-5b \ , \ b=-2 \Rightarrow c=-6 \ , \ a=5 \Rightarrow \underline{\pi_1: \ 5x-2y-6z=0}$

$\underline{\pi_2:}$ $(0,3,-1) \Rightarrow 3b-c+d=0 \Rightarrow (I) \ d=-3b+c$

$(2,-1,2) \Rightarrow 2a-b+2c+d=0 \Rightarrow (II) \ d=-2a+b-2c$

$(1,3,1) \Rightarrow a+3b+c+d=0 \Rightarrow (III) \ d=-a-3b-c$

$(I),(II) \Rightarrow -3b+c=-2a+b-2c \Rightarrow 3c=-2a+4b \Rightarrow c=\frac{-2a+4b}{3}$

$(II),(III) \Rightarrow -2a+b-2c=-a-3b-c \Rightarrow c=-a+4b$

$\Rightarrow \frac{-2a+4b}{3}=-a+4b \Rightarrow -2a+4b=-3a+12b \Rightarrow a=8b$

$b=1 \Rightarrow a=8 \Rightarrow c=-8+4=-4 \Rightarrow (I) \ d=-3\cdot 1-4=-7$

$\Rightarrow \underline{\pi_2: \ 8x+y-4z-7=0}$

$\underline{l_1:}$ $\pi_1: \ 5x-2y-6z=0 \ , \ yz: \ x=0 \Rightarrow -2y-6z=0 \Rightarrow y=-3z \ , \ z=t \Rightarrow y=-3t$

$\Rightarrow l_1: \ \underline{x}=(0,-3t,t)=t(0,-3,1) \quad , \quad \underline{(0,-3t,t)}$:נקודה טיפוסית על הישר

$\underline{l_2:}$ $\pi_2: \ 8x+y-4z-7=0 \ , \ xy: \ z=0 \Rightarrow 8x+y=7 \Rightarrow y=7-8x \ , \ x=s \Rightarrow y=7-8s$

$\Rightarrow {}_2: \ \underline{x}=(s,7-8s,0)=(0,7,0)+s(1,-8,0) \quad , \quad \underline{(s,7-8s,0)}$:נקודה טיפוסית על הישר

אין תלות ליניארית בין וקטורי הכיוון של l_1 ושל l_2: אין סקלר k המקיים: $(1,-8,0)=k(0,-3,1)$.

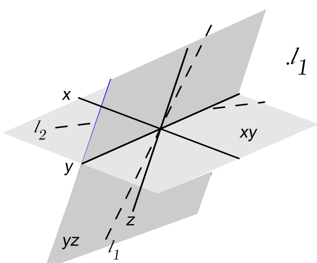
מסקנה: הישרים <u>אינם מקבילים</u> <u>ואינם מתלכדים</u>.

<u>בדיקת חיתוך:</u> מהשוואת רכיבי x ו־z של הנקודות הטיפוסיות $s=0 \ , \ t=0$ נקבל

סתירה ברכיב y: $0=7 \Rightarrow -3t=7-8s$ מסקנה: הישרים <u>אינם נחתכים</u>.

<u>מסקנה:</u> **הישרים l_1 ו־ l_2 <u>מצטלבים</u>**

נמחיש בציור:



xy הוא מישור "רצפה". מישור זה מכיל את הישר l_2.

yz הוא מישור קיר אנכי כמתואר. מישור זה מכיל את הישר l_1.

אם הישרים נפגשים - הם יפגשו על קו החיתוך (ציר y).

l_1 עובר דרך $(0,0,0)$ על קו החיתוך.

l_2 <u>אינו</u> עובר דרך $(0,0,0)$ על קו החיתוך.

לכן לישרים אלו <u>אין</u> נקודה משותפת. מכאן שהם **מצטלבים.**

בעמוד הבא - פתרון מקורי (של תלמיד) לשאלה זו, כמעט ללא נוסחאות!

להלן מובא פתרון מילולי, המבוסס על פתרון שהוגש בבגרות על ידי תלמיד.

המיוחד בפתרון המוצע הוא שהתלמיד לא השתמש כלל בנוסחאות, הסתמך על המשפטים בגאומטרית המרחב, והגיע לתשובה הנכונה. הוא קיבל את מלוא הנקודות.

*הפתרון מעובד ממאמר שהתפרסם **בעל"ה** (**עלון למורי המתמטיקה**) מס' 38 - היוצא ע"י **'קשר חם'**.*

*המאמר נכתב ע"י **מארק אפלבאום** (המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר שבע), ומובא ברשותו.*

להלן הפתרון:

הנקודות $(0,3,-1)$ ו־ $(0,0,0)$ נמצאות גם במישור π_1 וגם במישור yz,

ולכן הן מגדירות את הישר l_1 (ישר החיתוך בין π_1 ומישור yz).

מכאן: l_1 מוכל כולו במישור yz, והוא מוכל כולו גם במישור π_1.

l_2 הוא ישר החיתוך בין π_2 למישור xy.

לכן: l_2 מוכל כולו במישור xy, והוא כולו גם במישור π_2.

ישר החיתוך בין שני המישורים yz ו־ xy הוא ציר y.

לכן: אם שני הישרים (l_1 ו־ l_2) נחתכים - אזי הם נחתכים על ציר y.

הנקודה $(0,0,0)$ נמצאת גם במישור π_1 וגם במישור yz ,

לכן היא נמצאת על ישר החיתוך ביניהם - שהוא l_1.

לכן: נקודת החיתוך של l_1 עם ציר y היא $(0,0,0)$.

אם הנקודה $(0,0,0)$ היתה גם על l_2 אזי לשני המישורים π_1 ו־ π_2 היו <u>שלוש</u> נקודות משותפות:

שתי הנקודות הנתונות: $(2,-1,2)$ ו־ $(0,3,-1)$ והנקודה הנמצאת גם על l_1 וגם על l_2 - $(0,0,0)$

ואז שני המישורים π_1 ו־ π_2 היו מתלכדים, בסתירה לנתון (שהם נחתכים).

<u>מסקנה:</u> **l_1 ו־ l_2 <u>אינם</u> נחתכים, ו<u>אינם</u> מתלכדים.**

נזכיר משפט:

אם שני מישורים נחתכים, אזי שני ישרים הנמצאים עליהם (כל אחד על מישור אחר) מקבילים זה לזה אם ורק אם, הם מקבילים לישר החיתוך של המישורים.

לכן: אם l_1 ו־ l_2 מקבילים זה לזה, אזי הם מקבילים לישר החיתוך שבין שני המישורים yz ו־ xy, שהוא ציר y.

l_1 עובר דרך הנקודה $(0,0,0)$ (הנמצאת, כמובן, על ציר y), ולכן הוא <u>אינו</u> מקביל לציר y.

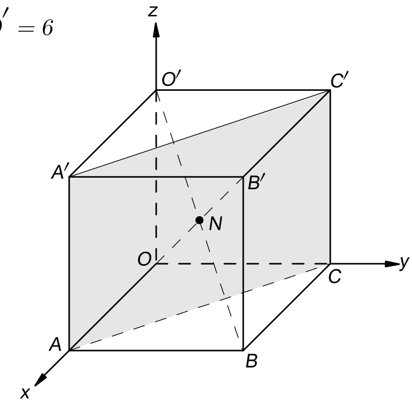
<u>מסקנה:</u> **שני הישרים <u>אינם</u> מקבילים זה לזה.**

ומכאן התשובה:

l_1 ו־ l_2 מצטלבים!

(יפה מאוד !)

10. א.



$\vec{OB'} = (2,4,6)$, $O(0,0,0)$ $\Rightarrow$ $OA = 2$, $OC = 4$, $OO' = 6$

$\Rightarrow$ $A(2,0,0)$, $B'(2,4,6)$, $C(0,4,0)$

$AC = A'C'$, $AA' = CC'$ $\Rightarrow$ מקבילית $AA'C'C$

$AA' \perp ABCO$ $\Rightarrow$ $AA' \perp AC$ $\Rightarrow$ מלבן $AA'C'C$

אלכסוני המלבן הם גם אלכסונים בתיבה

והם נפגשים במלבן עצמו (כמובן).

כל ארבעת אלכסוני תיבה נפגשים בנקודה אחת - N

שגם חוצה אותם, והיא נמצאת על המלבן:

$\Rightarrow$ $\vec{ON} = \frac{1}{2}\ \vec{OB'} = \frac{1}{2}\ (2,4,6) = (1,2,3)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{N(1,2,3)}$

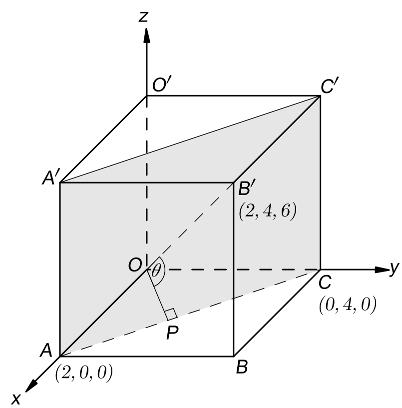
ב. בנית עזר: $OP \perp AC$

אם שני מישורים מאונכים זה לזה,

וישר המוכל באחד מהם מאונך לקו החיתוך - אזי הוא מאונך למישור השני, ולכן:

$OABC \perp AA'C'C$, $OP \perp AC$ $\Rightarrow$ $OP \perp AA'C'C$

מסקנה: הזווית המבוקשת היא: $\angle POB' = \theta$



$\vec{OP} = (a,b,c)$, $\underset{\text{בחירה}}{a = 1}$ $\Rightarrow$ $\vec{OP} = (1,b,c)$

$\vec{AC} = (-2,4,0) = 2\cdot(-1,2,0)$

$OP \perp AC$ $\Rightarrow$ $\vec{OP}\cdot\vec{AC} = 0$

$\Rightarrow$ $(1,b,c)\cdot(-1,2,0) = 0$

$\Rightarrow$ $-1+2b = 0$ $\Rightarrow$ $b = \frac{1}{2}$, $\underset{\text{בחירה}}{c = 0}$

$\Rightarrow$ $\vec{OP} = (1,\frac{1}{2},0) = \frac{1}{2}\cdot(2,1,0)$

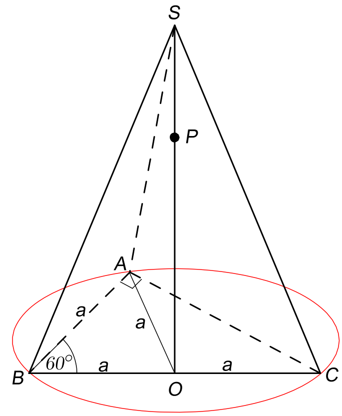
$\vec{OB'} = (2,4,6) = 2(1,2,3)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{OB'}}{|\vec{OP}|\cdot|\vec{OB'}|} = \frac{(2,1,0)\cdot(1,2,3)}{|(2,1,0)|\cdot|(1,2,3)|} = \frac{2+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = 0.4781 \Rightarrow \boldsymbol{\theta = 61.44^\circ}$$

העולם היום כל כך שונה ממה שהיה פעם

אפילו הנוסטלגיה – זה לא מה שהיה פעם . . .

21. א.



$$t\,\vec{SO} = (1+t)\,\vec{PO} \quad \Rightarrow \quad t\,(\vec{SP}+\vec{PO}) = (1+t)\cdot \vec{PO}$$

$$t\,\vec{SP} + t\,\vec{PO} = \vec{PO} + t\,\vec{PO} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{PO} = t\,\vec{SP}}$$

ב. מרכז המעגל החוסם משולש ישר־זווית הוא אמצע היתר: $\underline{\triangle ABC:}\ \angle A = 90^\circ$

לפי הנתון ולפי שתיכון ליתר שווה למחצית היתר: $AB = BO = OC = AO = a$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\triangle ABC:}\ \angle B = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle ABC} = \frac{a\cdot 2a\cdot \sin 60^\circ}{2} = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$SO = SP + PO = a + t\,SP = a + t\,a = a(1+t)$$

$$V_{SABC} = \tfrac{1}{3}\cdot S_\triangle \cdot h = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cdot a(1+t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3 \quad /\cdot\frac{3}{\sqrt{3}\,a^3}$$

$$\tfrac{1}{2}(1+t) = 2 \quad \Rightarrow \quad 1+t = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t=3}$$

ג.

$$t=3\,,\ a=8\,,\ SP=a \quad \Rightarrow \quad PO = t\,SP = t\,a = 3\cdot 8 = 24 \quad \Rightarrow \quad P(0,0,24)$$

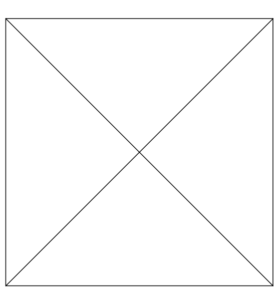
מישור ABC הוא מישור (x,y) . שני וקטורי כיוון שלו הם $(1,0,0)$ ו־ $(0,1,0)$.

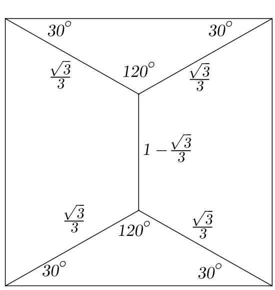
המישור המבוקש מקביל למישור ABC .

שני וקטורי כיוון ונקודה P שעליו מגדירים אותו:

$$\boldsymbol{\underline{x} = (0,0,24) + r(1,0,0) + s(0,1,0)}$$

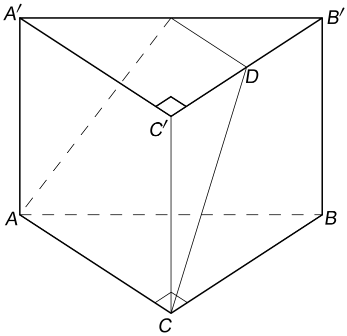
נתון ריבוע שאורך צלעו – יחידת אורך אחת.
מהי הרשת (קטעים וצמתים) הקצרה ביותר,
המחברת את כל קודקודי הריבוע?
לא להאמין, אבל אלו אינם שני אלכסוני הריבוע!
אלא דוקא הרשת המתוארת בציור השמאלי.
סכום אורכי אלכסוני הריבוע הוא $2\sqrt{2}$ י"א,
ואורכי הקטעים בציור משמאל הוא $\sqrt{3}+1$ י"א.
החישוב אינו קשה:





$$\sqrt{3}+1 \ <\ 2\sqrt{2} \ \ /(\ \ )^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3+2\sqrt{3}+1 \ <\ 4\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\ <\ 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\ <\ 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}+1 < 2\sqrt{2} \ \ (\surd)$$



.11 (5 יח׳ , קיץ תשס״ג - 2003)

נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה

משולש שווה־שוקיים וישר־זווית ($\angle ACB = 90^\circ$).

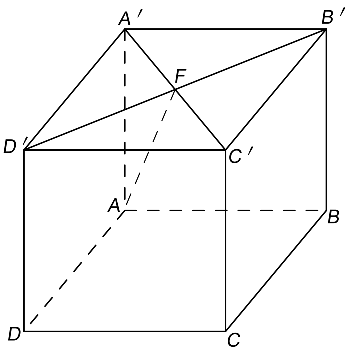
נקודה M היא אמצע הצלע $A'B'$,

ונקודה D היא אמצע הצלע $C'B'$.

R הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש $A'C'B'$.

הזווית בין המישור AMDC למישור הבסיס ABC היא α.

הבע באמצעות R ו־α את שטח הטרפז AMDC. **(117)**



.12 (5 יח׳ , קיץ תשס״ג - 2003 - מועד ב׳)

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.

אלכסוני הבסיס $A'B'C'D'$ נפגשים בנקודה F.

אורכי צלעות הבסיס הם $AD = a$, $DC = b$.

הזווית בין הישר AF לבסיס ABCD היא α.

א. הבע את גובה התיבה באמצעות a , b ו־α.

ב. נקודה E היא אמצע הצלע $D'C'$.

הבע באמצעות a , b ו־α את טנגנס הזווית שבין המישור העובר דרך DEFA

למישור העובר דרך הבסיס ABCD. **(118)**

פרדוקס הסתברותי

נתונות 4 **קוביות** A , B , C , D **כשהמספרים שעל פיאותיהן הם:**

<u>A</u>: 0, 0, 4, 4, 4, 4   <u>B</u>: 3, 3, 3, 3, 3, 3   <u>C</u>: 2, 2, 2, 2, 6, 6   <u>D</u>: 1, 1, 1, 5, 5, 5

מטילים שתי קוביות. ההסתברות ש־A תנצח את B היא $P(4,3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ההסתברות ש־B תנצח את C היא $P(3,2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ההסתברות ש־C תנצח את D היא $P(2,1) + P(6,x) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

ההסתברות ש־D תנצח את A היא $P(1,0) + P(5,x) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$

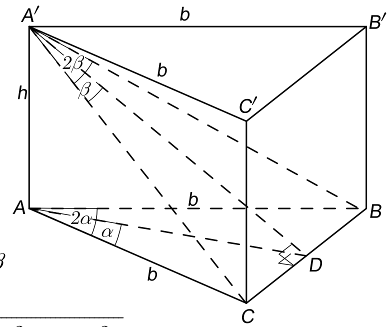
זאת אומרת: A מנצחת את B שמנצחת את C שמנצחת את D שמנצחת את A !!!

תשובות

.11 $S_{AMDC} = \frac{3\,R^2}{4\cos\alpha}$ (יחידות ריבועיות)

.12 א. $h = \frac{tg\,\alpha\,\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (יחידות אורך)   **ב.** $tg\,\beta = \frac{tg\,\alpha\,\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

4. א.



$AB = AC \ , \ AD \perp BC \quad \Rightarrow \quad \angle CAD = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

$\underline{\triangle ADC:}\ \frac{CD}{b} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad CD = b\sin\alpha$

$\frac{CD}{A'C} = \frac{b\sin\alpha}{A'C} = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad A'C = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\triangle A'AC \underset{\text{צז"צ}}{\cong} \triangle A'AB \quad \Rightarrow \quad A'C = A'B \quad \Rightarrow \quad \angle CA'B = \frac{2\beta}{2} = \beta$

$\triangle A'AC: \quad h = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{b^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} - b^2} = \frac{b}{\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}$

$V = S_{\triangle ABC}h = \frac{1}{2}\ b^2\sin 2\alpha \cdot \frac{b}{\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{V = \frac{b^3\sin 2\alpha}{2\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}$ **(יחידות קוב)**

ב.

$\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha > \sin^2\beta$

$0^\circ < 2\alpha < 180^\circ \ , \ 0^\circ < 2\beta < 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ \ , \ 0^\circ < \beta < 90^\circ$

$\underset{\text{(עולה)}}{y = \sin x \nearrow} \ \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad y = \sin^2 x \nearrow \ \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \ , \ \sin^2\alpha > \sin^2\beta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha > \beta}$ **(✓)**

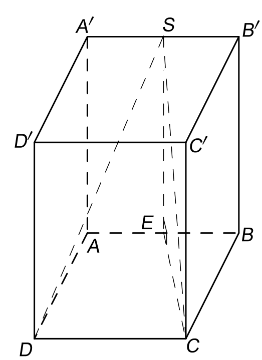
---

5. א.

$AE = EB \ \Leftarrow \ SE \parallel AA' \ \Leftarrow \ SE$ מאונך למישור הבסיס, בפרט: $SE \perp EC$

$\Leftarrow \ EC$ הוא היטל של SC על הבסיס $\Leftarrow \ \beta$ היא הזווית המבוקשת.

$A'S = SB' \quad \Rightarrow \quad SD = SC \ , \ SF \perp DC \quad \Rightarrow \quad DF = FC = -$



$\frac{FC}{SC} = \frac{\frac{}{2}}{SC} = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad SC = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$EC = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\frac{EC}{SC} = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{a}$

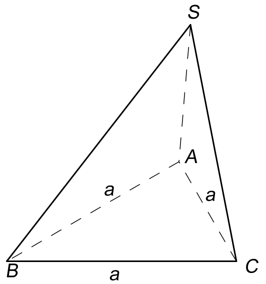
$\boldsymbol{\cos\beta = \sqrt{5}\sin\frac{\alpha}{2}}$

ב.

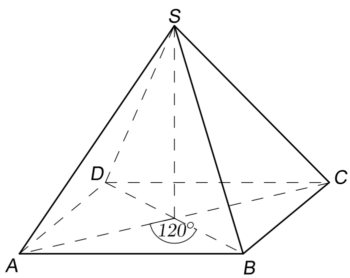
$SE = \sqrt{SC^2 - EC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2 15^\circ} - \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{3.7321 - 1.25} = a\sqrt{2.4821} = 1.5755\ a$

$V = a^2 \cdot h = a^2 \cdot SE = a^2 \cdot 1.5755\ a \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = 1.5755\ a^3}$ **(יחידות קוב)**

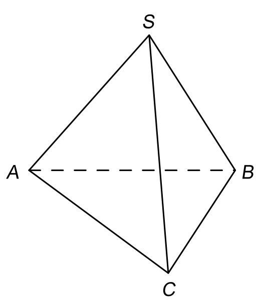
5. *(4 יח׳ , חורף תשנ״ו - 96)* נתונה פירמידה משולשת SABC משוכללת וישרה, שבסיסה משולש שווה־צלעות.
אורך מקצוע הבסיס הוא a, והמקצועות הצדדיים מאונכים זה לזה: $\angle BSA = \angle ASC = \angle BSC = 90^\circ$.
חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה. **(125)**



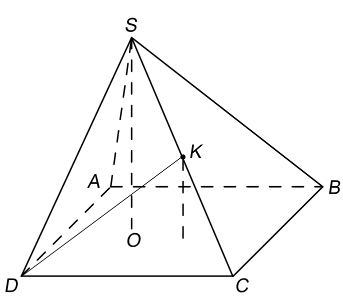
6. *(4 יח׳ , חורף תשנ״ז - 97)*
הבסיס של פירמידה ישרה SABCD הוא מלבן ABCD.
כל אחד מהמקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצר זווית של 30° עם מישור הבסיס.
הזווית בין אלכסוני המלבן היא של 120°.
גובה הפירמידה הוא 12 ס״מ = SM.
א. חשב את אורך המקצוע AB.
ב. חשב את הזווית בין הפאה הצדדית SAB לבסיס הפירמידה. **(125)**



7. *(5 יח׳ , קיץ תשנ״ד - 94)*
בפירמידה ישרה SABC נתון:
$SA = SB = SC = AB = AC = a \;,\; \angle BAC = \alpha$
הבע את נפח הפירמידה באמצעות a ו־ α . **(126)**



8. *(5 יח׳ , קיץ תשנ״ה - 95)*
נתונה פירמידה ישרה SABCD,
שבסיסה ריבוע וגובהה SO שווה לצלע הבסיס.
נקודה K היא אמצע המקצוע SC.
חשב את הזווית בין הישר DK
לבין מישור בסיס הפירמידה. **(127)**



2357 הוא המספר הראשוני הקטן ביותר המכיל את כל הספרות הראשוניות

תשובות

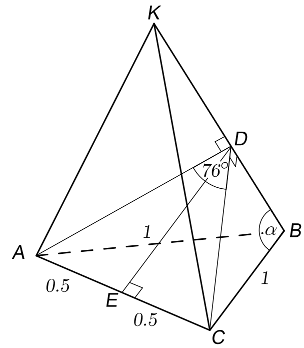
5. 35.26°

7. $V = \dfrac{a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}}{6}$ (יחידות נפח)

6. א. $AB = 36_{cm}$ **ב.** 49.11°

8. $\alpha = 32.31^\circ$

10. א.



נקבע, ללא הגבלת הכלליות: $AB = BC = AC = 1$

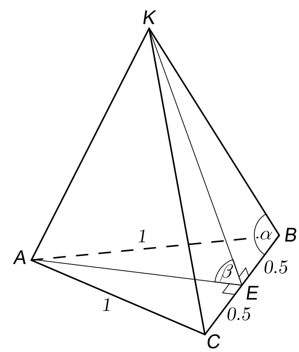
הפירמידה משוכללת וישרה , כל הפאות הצדדיות הן מש״ש
כל משולשי הפאות הצדדיות חופפים זה לזה
לכן, הגבהים לשוקיים שווים $CD = AD$,
והם נפגשים בנקודה אחת (D)
ADC הוא מש״ש ולכן הגובה לבסיס DE הוא גם תיכון
וגם חוצה זווית

$AE = EC = 0.5$

$\frac{EC}{CD} = \frac{0.5}{CD} = \sin 38^\circ \quad \Rightarrow \quad CD = \frac{0.5}{\sin 38^\circ} = 0.8121$

$\frac{CD}{BC} = \frac{0.8121}{1} = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 54.31^\circ} \quad (= \angle KCB)$

ב.



$\frac{KE}{EB} = \frac{KE}{0.5} = tg\ \alpha = tg\ 54.31^\circ \quad \Rightarrow \quad KE = 0.5 \cdot tg\ 54.31^\circ = 0.7$

$KB = \sqrt{KE^2 + BE^2} = \sqrt{0.7^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.74} = KA$

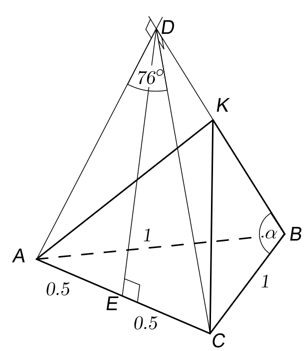
$AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = \sqrt{1^2 - 0.5^2} = \sqrt{0.75}$

משפט הקוסינוסים במשולש AKE

$0.74 = 0.75 + 0.7^2 - 2 \cdot \sqrt{0.75} \cdot 0.7 \cdot \cos \beta$

$\cos \beta = 0.4124 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 65.64^\circ}$

<u>הערה</u> לסעיף א': הנקודה D יכולה להִמצא מחוץ למשולש -
במקרה בו זווית הראש של משולש שווה השוקיים (הפאה
הצדדית) קהה הפתרון יהיה בדרך שתוארה לעיל
יש לעמוד על שתי נקודות: מישור DKA הוא גם מישור AKB,
מישור DKC הוא גם מישור KBC



נעמוד על הנקודה הראשונה (השניה באותה דרך):
שני ישרים נחתכים קובעים מישור. DK הינו המשך BK
DK ו־AK קובעים את מישור ADK
KB (שהוא המשך DK) ו־AK קובעים את מישור AKB
לשני המישורים יש שני קווים משותפים, ולכן הם מישור אחד

הביטוי $991n^2 + 1$ **נותן ריבוע שלם ראשון עבור** $n = 12,055,735,790,331,359,447,442,238,767$.

7. (קיץ ס"ח - 2008 , מועד ב) נתונה הפונקציה $f(x)=2a^x-\frac{1}{6}a^{2x}$ ($a>1$ פרמטר).

א. מצא את הערך של a^x שעבורו השיפוע של גרף הפונקציה הוא מקסימלי.

ב. ידוע כי השיפוע המקסימלי של גרף הפונקציה הוא $a\ln a$.

מצא את הערך של a.

ג. עבור הערך של a שמצאת בסעיף ב',

מצא את תחומי הקעירות של הפונקציה $f(x)$ כלפי מעלה ($\smile$) וכלפי מטה ($\frown$). **(146)**

8. (קיץ ס"ט - 2009 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{e^x+b}$, $b>0$ הוא פרמטר.

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. הבע באמצעות b את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. נתון כי לפונקציה יש נקודת פיתול אחת.

הראה כי: **(1)** שיעור y של נקודת הפיתול של הפונקציה אינו תלוי ב־ b .

(2) שיפוע המשיק בנקודת הפיתול אינו תלוי ב־ b .

ה. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה עבור: **(1)** $b=e$ **(2)** $b=\frac{1}{e}$.

סמן את הגרפים במספרים (1) ו־ (2) בהתאמה.

ו. העבירו משיק בנקודת הפיתול לפונקציה שעבורה $b=e$,

והעבירו משיק בנקודת הפיתול לפונקציה שעבורה $b=\frac{1}{e}$. **(147)**

מצא את שטח המרובע הנוצר על־ידי שני המשיקים, על־ידי ציר x

ועל־ידי הישר העובר דרך שתי נקודות הפיתול. (**חישוב השטח אינו דורש שימוש באינטגרל. א.מ.**)

9. (קיץ ס"ט - 2009 , מועד ב) נתונה הפונקציה $f(x)=x\,e^x$.

א. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה). נמק.

ב. מצא את תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה ($\smile$) וכלפי מטה ($\frown$).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד-ה. ראה שאלה 4 בעמ' 163 . **(148)**

תשובות

7. א. $a^x=3$ **ב.** $a=3$ **ג.** $\underline{\frown:}\ x>1$, $\underline{\smile:}\ x<1$

8. א. $y_{\rightarrow}=1$, $y_{\leftarrow}=0$ **ב.** $\forall x$ $\nearrow$ **ג.** $(0,\frac{1}{1+b})$ **ד. (1)** $y=\frac{1}{2}$ **(2)** $y'=\frac{1}{4}$ **ו.** $S=1$ (יח"ר)

9. א. $\underline{\nearrow:}\ \forall x$ **ב.** $\underline{\smile:}\ x>0$, $\underline{\frown:}\ x<0$

5. א.

$f(x)=\frac{e^{ax}}{4x^2+1}\ ,\ a>0\quad ,\quad$ תחום הגדרה: $\forall x$

$$f'(x)=\frac{ae^{ax}(4x^2+1)-8x\cdot e^{ax}}{(4x^2+1)^2}=\frac{e^{ax}(4ax^2+a-8x)}{(4x^2+1)^2}\overset{?}{=}0$$

$$e^{ax}>0\ \forall x\quad\Rightarrow\quad 4ax^2-8x+a=0\quad\Rightarrow\quad x_1=x_2\quad\Rightarrow\quad\triangle=0$$

$$\triangle=64-16a^2=0\quad\Rightarrow\quad a^2=\frac{64}{16}=4\ ,\ a>0\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a=2}$$

ב.

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{4x^2+1}\quad ,\quad e^{2x}>0\ \forall x\quad\Rightarrow\quad y\neq 0\quad ,\quad x=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{e^0}{1}=1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,1)}$$

ג.

x		c		b	
y'	$+$ ↗	0	$+$ ↗	0	$+$ ↗
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗ $\smile$	↗ infl.	↗ $\frown$	↗ infl.	↗ $\smile$

$\Rightarrow$ **(1)** ↗: $\forall x$, ↘: $\emptyset$

(2) $\smile$: $(x<c)\cup(x>b)$, $\frown$: $c<x<b$

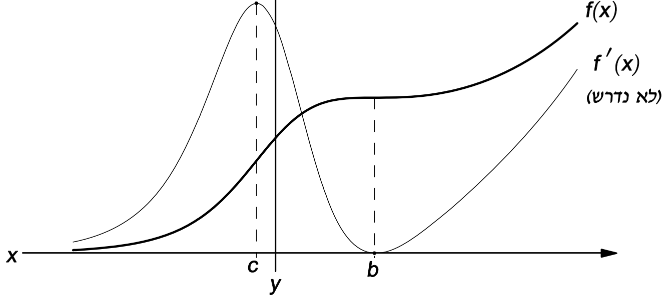
הסבר: בתחום שבו $y'>0$ - שם y עולה (↗), ולהיפך

בתחום שבו y' עולה - שם y'' חיובית (מקביל ל'להיפך' של השורה הקודמת)

בתחום שבו $y''>0$ - שם y קעורה כלפי מעלה ($\smile$)

בתחום שבו $y''<0$ - שם y קעורה כלפי מטה ($\frown$)

ד.



חלק ממשפט שהופיע בסיפור **שלושה ימים וילד**, של הסופר **א.ב. יהושע**:

"אבל אני כבר עמדתי . . . ליד לוח עמוס משוואות ריבועיות ממעלה ראשונה . . . "

<u>חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - שאלות</u>

(כל השאלות משאלון 007 , אלא אם כן צוין אחרת)

1. (חורף ס"ה - 2005) נתונה הפונקציה $y = \ln x^2 - \frac{1}{a}x^2$ $(a > 0)$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. עבור אילו ערכי a גרף הפונקציה כולו נמצא מתחת לציר x ? **(153)**

2. (קיץ ס"ה - 2005 , מועד א) **ב.** נתונה הפונקציה $y = x \ln x - ax^2$.

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $(\smile)$ בתחום $0 < x < 1$,

וקעורה כלפי מטה $(\frown)$ בתחום $x > 1$. מצא את a. **(153)**

3. (חורף ס"ו - 2006) נתונה הפונקציה $f(x) = ax \ln (x-2)$, $a \neq 0$.

השיפוע של הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $2 + \ln 2$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. מצא באיזה תחום הפונקציה קעורה כלפי מעלה $(\smile)$ ובאיזה תחום היא קעורה כלפי מטה $(\frown)$.

ה. נתון כי $f'(x) \neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה.

הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה. **(154)**

4. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln (x^2 - 2x + a)$.

א. לאילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ? **(155)**

ב. לאיזה ערך של a נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר x ?

הצב $a = 2$ וענה: **ג.** מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה: $\frown$

ואת התחום שבו היא קעורה כלפי מעלה: $\smile$.

ד. **(1)** מה הם תחומי העליה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) מה הם שיעורי x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, ומהו סוגן?

תשובות

1. **א.** $x \neq 0$ **ב.** $max: (-\sqrt{a}, \ln a - 1)$, $max\ (\sqrt{a}, \ln a - 1)$ **ג.** $0 < a < e$

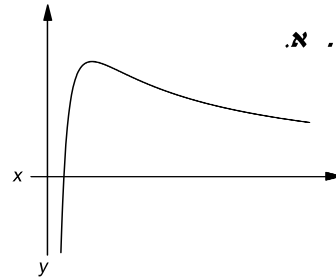
2. **ב.** $a = \frac{1}{2}$

3. **א.** $a = 1$ **ב.** $x > 2$ **ג.** $(3, 0)$ **ד.** $\smile: x > 4$ $\frown: 2 < x < 4$

4. **א.** $a > 1$ **ב.** $a = 2$ **ג.** $\frown: (x < 0) \cup (x > 2)$, $\smile: 0 < x < 2$

ד. **(1)** $\searrow: (x < 0) \cup (x > 2)$, $\nearrow: 0 < x < 2$ **(2)** $x_{max} = 2$, $x_{min} = 0$

8. א.



$f(x)=\frac{\ln ax}{x} \quad , \quad g(x)=\frac{\ln^2 ax}{x}$

$f'(x)=\frac{a\cdot\frac{1}{ax}\cdot x-1\cdot\ln ax}{x^2}=\frac{1-\ln ax}{x^2}\overset{?}{=}0$

$\ln ax=1 \quad\Rightarrow\quad e=ax \quad\Rightarrow\quad x=\frac{e}{a}$

מכנה f' חיובי. לכן מספיק לגזור את מונה f' :

$(1-\ln ax)'=-\frac{1}{ax}\cdot a=-\frac{1}{x}$

$-\frac{1}{\frac{e}{a}}=-\frac{a}{e}<0 \quad\Rightarrow\quad f''(\frac{e}{a})<0 \quad\Rightarrow\quad max \ , \ f(\frac{e}{a})=\frac{\ln e}{\frac{e}{a}}=\frac{a}{e} \quad\Rightarrow\quad$ **max :** $\boldsymbol{(\frac{e}{a}\ ,\ \frac{a}{e})}$

(גם נתון בציור)

ב.

$g'(x)=\frac{x\cdot 2\ln ax\cdot\frac{a}{ax}-1\cdot\ln^2 ax}{x^2}=\frac{2\ln ax-\ln^2 ax}{x^2}=\boxed{\frac{\ln ax\,(2-\ln ax)}{x^2}}\overset{?}{=}0$

$(1)\ \ \ln ax=0 \quad\Rightarrow\quad ax=e^0=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{a} \ , \ g(\frac{1}{a})=\frac{\ln^2 1}{\frac{1}{a}}=0$

$(2)\ \ \ln ax=2 \quad\Rightarrow\quad ax=\ ^2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{e^2}{a} \ , \ g(\frac{e^2}{a})=\frac{\ln^2 e^2}{\frac{e^2}{a}}=\frac{a\cdot 2^2}{e^2}=\frac{4a}{e^2}$

x		0		$\underline{1}$		$\frac{e^2}{a}$	
g'	$\emptyset$	$\emptyset$	$\frac{-+}{+}=-$	0	$\frac{++}{+}=+$	0	$\frac{+-}{+}=-$
g	$\emptyset$	asym.	↘	min	↗	max	↘

$\Rightarrow$ **min :** $\boldsymbol{(\frac{1}{a}\ ,\ 0)}$, **max :** $\boldsymbol{(\frac{e^2}{a}\ ,\ \frac{4a}{e^2})}$

ג. (1)

$\frac{\ln ax}{x}=\frac{\ln^2 ax}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln ax=\ln^2 ax$

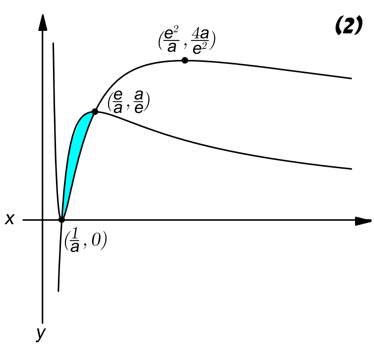
$(1)\ \ \ln ax=0 \quad\Rightarrow\quad ax=e^0=1$

$x=\frac{1}{a} \ , \ y=\frac{\ln 1}{\frac{1}{a}}=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(\frac{1}{a}\ ,\ 0)}$

$(2)\ \ \ln ax\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \ln ax=1 \quad\Rightarrow\quad ax=e^1=e$

$x=\frac{e}{a} \ , \ y=\frac{\ln e}{\frac{e}{a}}=\frac{a}{e} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(\frac{e}{a}\ ,\ \frac{a}{e})}$

(2)



הסדרה ההרמונית

הסדרה הבאה: $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \frac{1}{6} , \frac{1}{7} , \frac{1}{8} , \frac{1}{9} , \frac{1}{10} , \frac{1}{11} , \frac{1}{12} \ . . .$ נקראה **סדרה הרמונית**.

מה שמפתיע בסדרה זו הוא שהסכום שלה הינו אינסוף ! אם נבחר מספר גדול כרצוננו, נניח k

– אזי אם נחבר מספיק איברים של הסדרה ההרמונית, נקבל מספר הגדול ממנו:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ . . .\ +\frac{1}{n}>k$

5. ב.

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\quad,\quad f'(x)=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

מונה הנגזרת חיובי לכל x : $\sqrt{1+x^2}>x$. משיקול דומה גם המכנה חיובי לכל x .

לכן:

$$S=\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx=f(x)\Big|_{-1}^{1}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{-1}^{1}=\ln(1+\sqrt{2})-\ln(-1+\sqrt{2})$$

$$S=\ln\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)=\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{S=\ln(3+2\sqrt{2})=\ln 5.83=1.76}$$ **(יחידות ריבועיות)**

---

6. ד. הנגזרת של המכנה שווה למונה: $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$

לכן:

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\cdot(e^x+e^{-x})'\,dx\quad\Rightarrow\quad S=\ln(e^x+e^{-x})\Big|_{\ln 2}^{a}$$

$$S=\ln(e^a+e^{-a})-\ln(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2})=\ln(e^a+e^{-a})-\ln(2+\tfrac{1}{2})=\ln(e^a+e^{-a})-\ln\tfrac{5}{2}$$

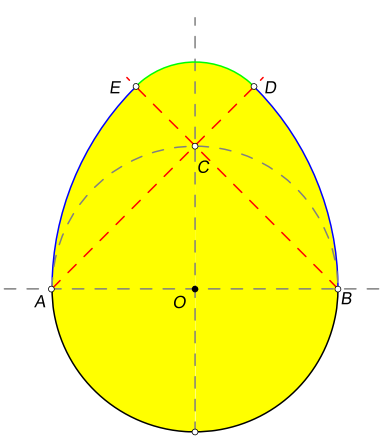
$$=\ln\frac{e^a+e^{-a}}{\frac{5}{2}}=\ln 4-\ln 3=\ln\tfrac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cancel{2}(e^a+e^{-a})}{5}=\frac{\cancel{4}^{\,2}}{3}\quad\Rightarrow\quad 3e^a+\frac{3}{e^a}=10$$

$$e^a=k\quad\Rightarrow\quad 3k+\frac{3}{k}=10\quad\Rightarrow\quad 3k^2-10k+3=0\quad\Rightarrow\quad k=\frac{10\pm8}{6}=\frac{5\pm4}{3}$$

$$k_1=3\quad\Rightarrow\quad e^a=3\quad\Rightarrow\quad \ln e^a=\ln 3\quad\Rightarrow\quad a=\ln 3>\ln 2\ (\surd)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a=\ln 3}$$

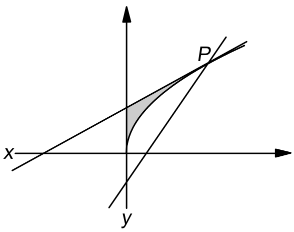
$$k_2=\tfrac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad e^a=\tfrac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad \ln e^a=\ln\tfrac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad a=\ln\tfrac{1}{3}<\ln 2\ (\times)$$

כיצד מציירים ביצה?



על מערכת צירים חגים מעגל שמרכזו O וקוטרו AB .
C היא נקודת חיתוך המעגל עם ציר y .
מעבירים ישר דרך B ו־ C ועוד ישר דרך A ו־ C .
חגים קשת מעגל $\overset{\frown}{DB}$ שמרכזו A ומחוגו AB .
חגים קשת מעגל $\overset{\frown}{AE}$ שמרכזו B ומחוגו BA .
D ו־ E הן נקודות חיתוך של המשך הישרים
AC ו־ BC עם הקשתות.
חגים קשת מעגל $\overset{\frown}{ED}$ שמרכזו C ומחוגו CE .

.11 (006 , קיץ תשס"ד - 2004 , מועד א)



נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ $(a>0)$

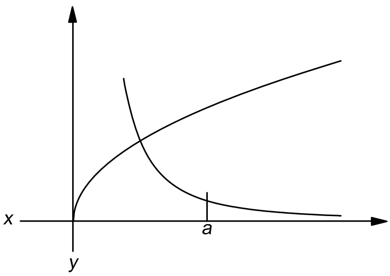
הישר $y=x-2a$ חותך את הפונקציה בנקודה P .

בנקודה זו העבירו משיק לפונקציה.

הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק, ועל ידי ציר y . **(177)**

.12 (004 , קיץ תשס"ו - 2006 , מועד ב)



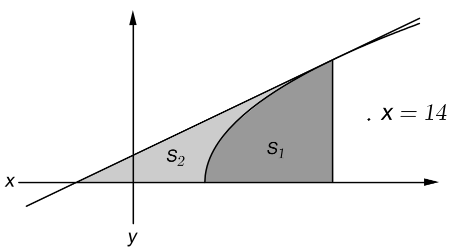
נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{4x}$ ו־ $g(x)=\frac{2}{x^2}$, $x>0$.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות,

על ידי ציר x ועל ידי הישר $x=a$ כאשר $a>1$

הוא: $\frac{7}{3}$ (י"ר) . מצא את הערך של a. **(178)**

.13 (004 , חורף תשע"א - 2011)



נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x-5}$

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=14$.

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי ציר x , ועל ידי הישר $x=14$.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר x .

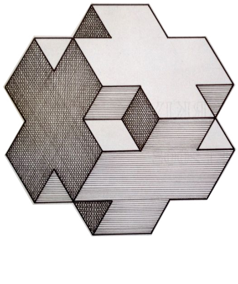
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר x .

ג. מצא את היחס $\frac{S_1}{S_2}$. **(178)**

כשאנשים קטנים מטילים צל ענק - אות הוא כי השמש שוקעת . . .

תשובות

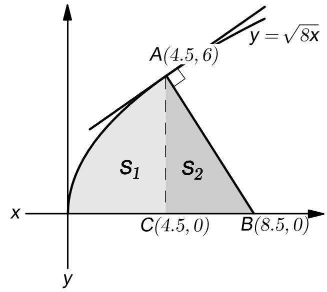


.11 $S=\frac{2}{3}a^2$ (י"ר)

.12 $a=2$

.13 **א.** $x\geq 5$ **ב.** $(-4,0)$ **ג.** $\frac{S_1}{S_2}=2$

.8



$y=\sqrt{8x}$, $y'=\frac{1}{2\sqrt{8x}}\cdot 8=\frac{4}{\sqrt{4\cdot 2x}}=\frac{4}{2\sqrt{2x}}=\frac{2}{\sqrt{2x}}$

$y'(4.5)=\frac{2}{\sqrt{2\cdot 4.5}}=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad m_{AB}=-\frac{3}{2}$

$\underline{y_{AB}:}$ $A(4.5,6) \quad\Rightarrow\quad y-6=-\frac{3}{2}(x-4.5)=-\frac{3}{2}x+6.75$

$\Rightarrow\quad y=-1.5x+12.75$

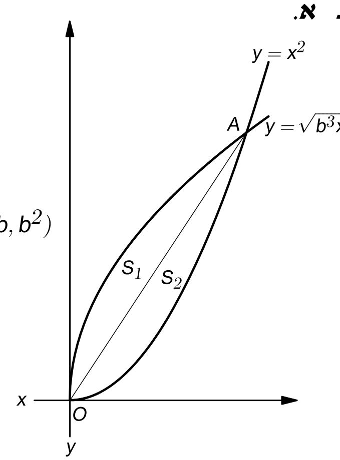
$\underline{B:}$ $y=0 \quad\Rightarrow\quad -1.5x+12.75=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{12.75}{1.5}=8.5 \quad\Rightarrow\quad B(8.5,0)$

$$S_1=\sqrt{8}\cdot\int_0^{4.5}\sqrt{x}\,dx=\left(\sqrt{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{4.5}=\frac{\sqrt{8}\cdot 2}{3}\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-0=\frac{\sqrt{2\cdot 4}\cdot 2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\cancel{2}}{3}\cdot\frac{27}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{54}{3}=18$$

$$S_2=S_{\triangle ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{6\cdot(8.5-4.5)}{2}=3\cdot 4=12$$

$S=S_1+S_2=18+12 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=30}$ **(יחידות ריבועיות)**

.9 א.



$f(x)=\sqrt{b^3x}$, $g(x)=x^2$, $b>0$

$\underline{A:}$ $\sqrt{b^3x}=x^2 \quad\Rightarrow\quad b^3x=x^4 \quad\Rightarrow\quad x^4-b^3x=0$

$x(x^3-b^3)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_O=0$

$x_2=x_A=b \quad\Rightarrow\quad y_2=b^2 \quad\Rightarrow\quad A(b,b^2)$

$\underline{y_{OA}:}$ $m_{OA}=\frac{b^2-0}{b-0}=b$, $O(0,0) \quad\Rightarrow\quad y_{OA}=bx$

$$S_1=\int_0^b(\sqrt{b^3x}-bx)dx=\left(\sqrt{b^3}\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{bx^2}{2}\right)\Big|_0^b$$

$S_1=b^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot b^{\frac{3}{2}}-\frac{b^3}{2}-0=\frac{2}{3}\,b^{\frac{6}{2}}-\frac{b^3}{2}=\frac{2b^3}{3}-\frac{b^3}{2}=\frac{4b^3-3b^3}{6} \quad\Rightarrow\quad \underline{S_1=\frac{b^3}{6}}$

$S_2=\int_0^b(bx-x^2)dx=\left(\frac{bx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^b=\frac{b^3}{2}-\frac{b^3}{3}-0=\frac{3b^3-2b^3}{6} \quad\Rightarrow\quad \underline{S_2=\frac{b^3}{6}}$

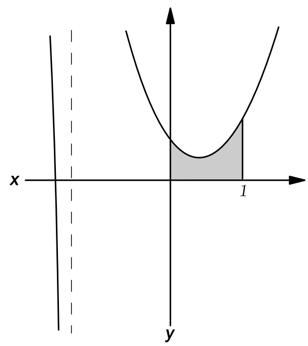
$\Rightarrow\quad \mathbf{S_1=S_2}$ (✓)

ב.

$$V=\pi\int_0^b\left((\sqrt{b^3x})^2-(x^2)^2\right)dx=\pi\int_0^b(b^3x-x^4)dx$$

$V=\pi\left(\frac{b^3x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^b=\pi\left(\frac{b^5}{2}-\frac{b^5}{5}-0\right)=\pi\cdot\frac{5b^5-2b^5}{10} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{V=\frac{3}{10}\,\pi\, b^5}$ **(יחידות קוב)**

3. ב.



$$\begin{array}{rl}
 & 3x^2-2x \\ \cline{1-1}
 & 6x^3+5x^2-6x+2+b \;\big|\; 2x+3 \\
- & 6x^3+9x^2 \\ \cline{2-2}
 & -4x^2-6x+2+b \\
- & -4x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & 2+b
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{6x^3+5x^2-6x+2+b}{2x+3}=3x^2-2x+\frac{2+b}{2x+3}$$

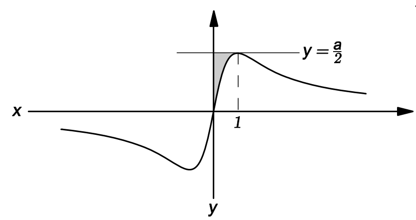
$$S=\int_0^1\left(3x^2-2x+\frac{2+b}{2x+3}\right)dx=\left(x^3-x^2+\frac{2+b}{2}\ln|2x+3|\right)\Big|_0^1$$

$$=\left(1-1+\frac{2+b}{2}\ln 5\right)-\left(0-0+\frac{2+b}{2}\ln 3\right)=\frac{2+b}{2}(\ln 5-\ln 3)$$

$$=\frac{2+b}{2}\ln\frac{5}{3}\underset{\text{נתון}}{=}2\ln\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{2+b}{2}=2 \quad\Rightarrow\quad 2+b=4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{b=2}$$

---

4. א.



$$f(x)=\frac{ax}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{a(1+x^2)-2x\cdot ax}{(1+x^2)^2}=\frac{a(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{a(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\overset{?}{=}0$$

$$\Rightarrow \quad 1-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

$$(1-x^2)'=-2x \;,\quad -2\cdot 1<0 \quad\Rightarrow\quad f''(1)<0 \quad\Rightarrow\quad x_{max}=1 \quad\Rightarrow\quad y_{max}=\frac{a\cdot 1}{1+1^2}=-$$

$$\frac{ax}{1+x^2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{ax}{1+x^2}\,dx=\frac{a}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$$S=\int_0^1\left(\frac{a}{2}-\frac{ax}{1+x^2}\right)ax=\left(\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1=\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln 2\right)-(0-0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S=\frac{a}{2}(1-\ln 2)=0.1534\,a}$$ **(יחידות ריבועיות)**

אחת מאבני הכותל המערבי היא אולי אבן הבניה הגדולה ביותר בעולם העתיק.
אורכה - 13.6 מ', גובהה - 3.3 מ'. ועוביה - 4.6 מ'.
משקלה מוערך ב־570 טון, כמשקלם של 8 טנקים!

(ירושלים וכל נתיבותיה - הוצאת יד יצחק בן צבי)

סיווג השאלות לפי נושאים

*סוגריים מרובעים – מספר העמוד, שאר המספרים – מספרי השאלות. את הסיווג הכין **שרון חיים**.*

גידול ודעיכה [1]

הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה

- מצב התחלתי
1, 14
- זמן
2, 4, 5, 6, 7
- קצב גידול/דעיכה
3, 8, 11, 12
- מצב סופי
9, 10, 13
- זמן מחצית החיים
1, 4, 11, 13
- הבעה באמצעות פרמטר
2

גאומטריה אנליטית [10]

- משולש
8, 11, 15, 21
- משולש שווה-צלעות
1, 6
- מקבילית
2
- מלבן
21
- ריבוע
3
- טרפז
2, 12
- מחומש
2
- מעגל
3, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 12, 21, 22, 23, 24, 25
- פרבולה
12
- משיק לפרבולה
9, 10, 11, 15
- אליפסה
5, 6, 7, 19, 23, 25
- מפגש התיכונים במשולש
8
- מפגש האנכים האמצעיים במשולש
8
- מפגש הגבהים במשולש
15

מספרים מרוכבים [42]

הגדרות וטכניקה אלגברית

- מספר מדומה טהור
26
- מספר הופכי
21
- מספר צמוד
1, 3, 4, 15, 20, 22, 27
- ערך מוחלט
2, 12, 13, 15, 17, 24, 27
- משוואות מרוכבות
1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 21, 22, 25, 27
- משוואות מרוכבות, הבעה באמצעות פרמטר
8, 14, 23

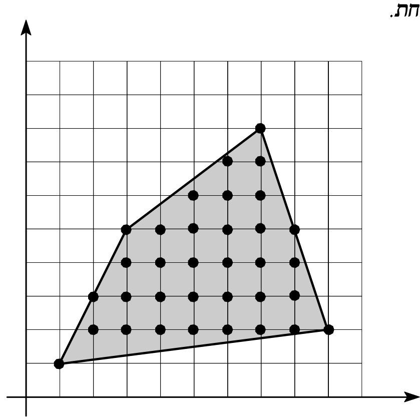
מישור גאוס

- קו ישר
23, 24
- שני ישרים מאונכים
26
- משולש
12
- משולש שווה-צלעות
22
- מעוין
18
- ריבוע
5
- מעגל
11
- מעגל היחידה
4, 15, 19
- משולש שווה-צלעות חסום במעגל היחידה
4
- ריבוע חסום במעגל
6
- מקומות גאומטריים
13, 21
- שרטוט סקיצה, מקום גאומטרי
27

בשילוב סדרות

- סדרה הנדסית
1, 2, 11

נתון שריג במערכת צירים שעליו מסומנות נקודות ששיעורן הוא מספרים שלמים.
המרחק בין שתי נקודות אופקיות או אנכיות הוא יחידת אורך אחת.
שטח מצולע שכל קדקודיו בנקודות השריג הוא
מספר הנקודות שבתוך המצולע,
בתוספת מחצית מספר הנקודות השריג שעל שפתו פחות אחת.
דוגמה:
שטח המצולע בציור הוא:
$S = 28 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 30$ **(יחידות ריבועיות).**
(בדוק!)



וקטור גאומטרי - צורות במישור [63]

גופים במישור:
- משולש 6
- ריבוע 6
- טרפז 9
- מרובע חסום במחומש 12

וקטור גאומטרי - גופים במרחב [63]

מנסרה ישרה מרובעת שבסיסה:
- מעוין 3

מקבילון 4

תיבה 5

קוביה 11

פירמידה משולשת שבסיסה:
- משולש 7, 13
- משולש שווה-צלעות (משוכללת) 2

פירמידה מרובעת שבסיסה:
- מקבילית 10

פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה:
- ריבוע 1

פירמידה מחומשת שבסיסה:
- מחומש 8

וקטור גאומטרי - חישובים [78]

מצב הדדי: ישרים ומישורים

שני ישרים
- מאונכים 1

ישר ומישור
- מאונכים 11
- מקבילים 11, 13

חישוב זוויות
- זווית בין שני ישרים 2, 3, 7, 12
- זווית בין ישר למישור 5

וקטור אלגברי - צורות במישור [78]

גופים במישור:
- משולש 4, 19
- מקבילית 19
- מלבן 11, 14
- ריבוע 16
- מעגל 17, 21

וקטור אלגברי - גופים במרחב [78]

תיבה 10, 15
- תיבה שבסיסה ריבוע 4/4, 8/4, 31/2

קוביה 8, 17

פירמידה משולשת שבסיסה:
- משולש 20, 21

פירמידה מרובעת שבסיסה:
- מקבילית 1

וקטור אלגברי - חישובים [78]

משוואת מישור 1, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 23

הצגה פרמטרית של:
- ישר 6, 8, 13, 14, 17, 18
- מישור 16, 21

חישוב מרחקים בין:
- שתי נקודות 11
- שני ישרים 7
- ישר למישור 12, 14

מצב הדדי: ישרים ומישורים

שני ישרים
- מאונכים 22
- מצטלבים 9, 22

ישר ומישור
- מאונכים 10
- מקבילים 7
- נחתכים 3, 20, 23
- ישר מוכל במישור 3, 7, 22, 23

ישר החיתוך בין שני מישורים והצגה פרמטרית 5, 9, 23

חישוב זוויות
- זווית בין שני ישרים 22
- זווית בין ישר למישור 1, 2, 10, 15, 23

טריגונומטריה במרחב - מנסרה [108]

מנסרה ישרה משולשת שבסיסה:
- משולש ישר-זווית 9, 10
- משולש שווה-שוקיים 4
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים 11
- משולש שווה-צלעות (משוכללת) 2, 3

תיבה 12
- תיבה שבסיסה ריבוע 1, 5, 6, 7, 8

קוביה 6

חישוב זוויות
- זווית בין שני ישרים 1, 3, 4, 7, 8, 9
- זווית בין ישר למישור 2, 3, 5, 9, 10, 12
- זווית בין שני מישורים 2, 6, 9, 10, 11, 12

טריגונומטריה במרחב - פירמידה [119]

פירמידה ישרה משולשת שבסיסה:
- משולש 7
- משולש שווה-שוקיים 13, 16, 18
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים 14
- משולש שווה-צלעות (משוכללת) 1, 2, 3, 5, 10, 12

פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה:
- מלבן 6
- ריבוע 4, 8, 9, 11, 15, 17

חישוב זוויות
- זווית בין שני ישרים 5, 6, 7, 9, 10, 11, 18
- זווית בין ישר למישור 2, 3, 5, 6, 8, 12, 14, 16, 17, 18
- זווית בין שני מישורים 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 18

מספר החלקים המקסימלי שִׁשָּׁה מיתרים חותכים ממעגל הוא 22 (נַסֵּה!)

חשבון דיפרנציאלי

פונקציות מעריכיות [136]

- פונקציה מעריכית (בסיס a) — 7
- פונקציה מעריכית (בסיס e) — 1, 3, 6, 9, 10
- פונקציה מעריכית עם פרמטר (בסיס e) — 2, 4, 5, 8
- תחומי קעירות כלפי מטה/מעלה — 5, 7, 8
- נקודות פיתול — 4, 5, 8

פונקציות לוגריתמיות [149]

- פונקציה מעריכית (בסיס a) — 12
- פונקציה לוגריתמית — 10
- פונקציה לוגריתמית עם פרמטר — 6
- פונקציית LN — 10
- פונקציית LN עם פרמטר — 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8
- בעיות קיצון - פונקציית LN — 9, 11
- תחומי קעירות כלפי מטה/מעלה — 2, 3, 4
- נקודות פיתול — 5

חשבון אינטגרלי

פונקציות מעריכיות [162]

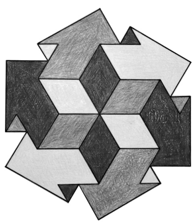
- פונקציה מעריכית (בסיס e) — 2, 3, 7
- פונקציה מעריכית (בסיס e) עם פרמטר — 1, 4, 6
- פונקציית LN — 7
- פונקציית LN עם פונקציית שורש — 5
- חישוב ערך פרמטר — 1, 4, 6

פונקציות עם שורש ריבועי [169]

- ללא פרמטר — 2, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13
- עם פרמטר — 1, 3, 9, 10, 11

פונקציות שפתרונן לוגריתמי [179]

- ללא פרמטר — 2, 6
- עם פרמטר — 1, 3, 4, 5, 7,
- חילוק פולינומים — 3, 5



אלוף ריבועי הקסם

ישנם 880 ריבועי קסם יסודיים מסדר 4×4 ,
כלומר שאף לא אחד מהם הינו שיקוף או סיבוב של ריבוע קסם אחר.
ריבוע הקסם המתואר משמאל הוא כנראה ריבוע הקסם היפה ביותר.
לא רק שסכום כל שורה, כל טור וכל אלכסון שווה ל- 34,
אלא עוד 50 וריאציות סימטריות נוספות, ובסה"כ: 60 צירפים סימטריים של 34 !
להלן פירוט הצירופים (למעט שורות, טורים ואלכסונים):

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4