אלי מיטב

בגרויות מתמטיקה - 581 - כיתה י - פתרונות מלאים

גאומטריה אוקלידית

א - ללא פרופורציה וללא מעגל ____ 1

ב - פרופורציה ודמיון ללא מעגל ____ 16

ג - מעגל ללא פרופורציה ____ 49

ד - פרופורציה במעגל - תאלס, חוצה־זווית ודמיון ____ 84

- משפטי פרופורציה במעגל ____ 128

טריגונומטריה במישור - ללא מעגל ____ 135

חשבון דיפרנציאלי

- פונקציות פולינומיאליות ____ 141

- פונקציות רציונאליות ____ 143

- פונקציות עם שורש ריבועי ____ 156

בעיות קיצון ____ 168

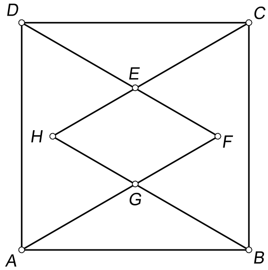
סיווג לנושאים ____ 181

המשפטים בגאומטריה ____ 192

נוסחאון הבגרות לארבע יחידות ____ 195

גאומטריה אוקלידית

א - ללא פרופורציה וללא מעגל - שאלות



1. (005 , קיץ ס"ז - 2007 , מועד ב)

על צלעות הריבוע $ABCD$ בנו משולשים שווי־צלעות - AFD ו־ BHC.

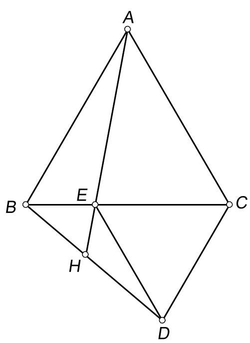
הצלעות CH ו־ DF נחתכות בנקודה E ,

והצלעות BH ו־ AF נחתכות בנקודה G.

אורך צלע הריבוע הוא 6_{cm}.

א. הוכח כי המרובע $HEFG$ הוא מעוין.

ב. חשב את אורך הגובה לצלע AB במשולש ABG. **(6)**



2. (005 , חורף ס"ח - 2008)

נתון משולש שווה־צלעות ABC.

E היא נקודה על הצלע BC.

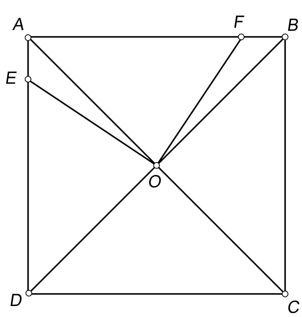
על הקטע EC בנו משולש שווה־צלעות ECD.

המשך AE חותך את BD בנקודה H.

הוכח: **א.** $\triangle AEC \cong \triangle BDC$

ב. $\angle EAC = \angle HED$

ג. אם $HE = HD$ אז $AE \perp BC$ **(7)**



3. (005 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד לוחמים)

מרובע $ABCD$ הוא ריבוע.

הנקודה O היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

הנקודה F נמצאת על הצלע AB,

והנקודה E נמצאת על הצלע AD. $FO \perp EO$.

א. הוכח: $\triangle AOE \cong \triangle BOF$.

ב. נתון גם: $FB = 1.5_{cm}$, $S_{ABCD} = 81_{cm^2}$.

(1) מצא את היחס בין שטח המשולש BOF לשטח המשולש AOB.

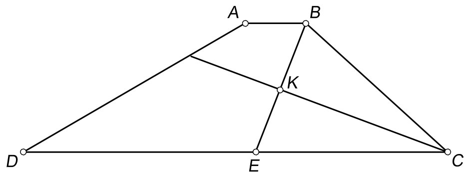
(2) חשב את שטח המשולש BOF. **(8)**

$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$ **המספר הקטן ביותר בחזקת** 4 **ששוה לסכום** 5 **מספרים בחזקת** 4

תשובות

1. **ב.** $h = \sqrt{3}_{cm}$ **2.** **א.** $\angle ABC = 135^{o}$ **3.** **ב.** **(1)** $\frac{1}{6}$ **(2)** $3\frac{3}{8}{}_{cm^2}$

.4 (005 , חורף ס"ט - 2009)



בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ חוצה־זווית ABC

חותך את חוצה־זווית BCD

בנקודה K , ואת הבסיס DC בנקודה E .

א. הוכח כי $\angle BKC = 90^{\circ}$.

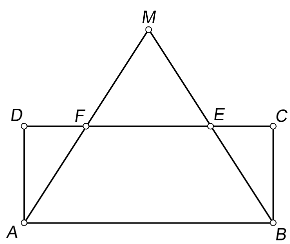
ב. דרך הנקודה K מעבירים מקביל לבסיסי הטרפז.

הוכח כי המקביל הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$.

ג. נתון: $BC = 6_{cm}$, $AB = 2_{cm}$, $DE = 8_{cm}$.

חשב את האורך של קטע האמצעים בטרפז $ABCD$. נמק. **(9)**

.5 (005 , קיץ ס"ט - 2009 , מועד א)



על הצלע AB של המלבן $ABCD$

בנו משולש שווה־שוקיים AMB $(AM = BM)$.

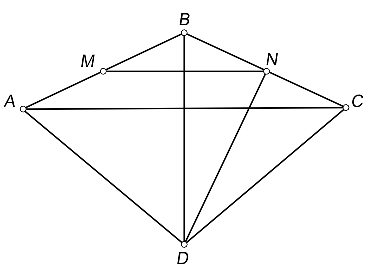
MA ו־ MB חותכים את DC בנקודות F ו־ E בהתאמה.

EF הוא קטע אמצעים במשולש AMB.

א. הוכח כי $DF = EC$.

ב. הוכח כי היחס בין שטח המשולש ADE לשטח הטרפז $ABCE$ הוא $3:5$. **(10)**

.6 (005 , קיץ ס"ט - 2009 , מועד ב)



נקודה D נמצאת מחוץ למשולש ABC $(\angle ABC > 90^{\circ})$

כך ש־ $AD = BD = CD$.

נקודה N מונחת על הצלע BC כך ש־ $ND \perp BC$.

נקודה M היא אמצע הצלע AB .

א. הוכח: $MN \parallel AC$.

ב. נתון גם כי $BD \perp AC$. הוכח כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

ג. BD ו־ AC נחתכים בנקודה K .

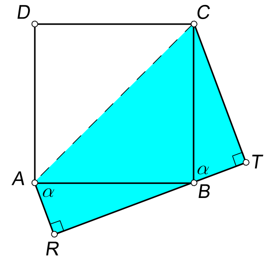
נתון: $AB = 8_{cm}$. חשב את אורך הקטע MK . נמק. **(10)**

מאורעות נדירים שומרים לעצמם את הזכות להתרחש   (מרטין גרדנר)

תשובות

.4 ג. 8_{cm} **.6 ג.** $MK = 4_{cm}$

9. א.



$(1)\ \angle CBT = \alpha \ \stackrel{(2)}{\Rightarrow}\ \angle BCT = 90^{\circ} - \alpha$

$(3)\ \angle ABR = 90^{\circ} - \alpha \ \stackrel{(5)}{\Rightarrow}\ \angle BAR = \alpha$

$(4)\ AB = BC \ \stackrel{(5)}{\Rightarrow}\ \triangle ABR \cong \triangle BCT$

$(6)\ AR = BT\ ,\ CT = BR \ \Rightarrow\ \mathbf{AR + CT = TB + BR = TR}\ (\checkmark)$

ב.

עבור $\alpha \neq 45^{\circ}$ המרובע $ACTR$ הוא טרפז: $\angle RAC \neq 90^{\circ}\ ,\ AR \parallel CT \ \Rightarrow\ \angle R = \angle T$.

עבור $\alpha = 45^{\circ}$ - מרובע זה הוא מלבן: מרובע ששלוש מזוויותיו ישרות - הוא מלבן.

$\underline{\alpha \neq 45^{\circ}:}\ (7)\ S_{ACTR} = \frac{(AR+CT)\cdot TR}{2} \ \Rightarrow\ \mathbf{S_{ACTR} = \frac{1}{2}\, TR^2}$ **(יחידות ריבועיות)**

$\underline{\alpha = 45^{\circ}:}\ AR = CT \ \Rightarrow\ TR = 2AR \ \Rightarrow\ AR = \frac{1}{2} TR$

$S_{ACTR} = RT \cdot AR \ \Rightarrow\ \mathbf{S_{ACTR} = \frac{1}{2} TR^2}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

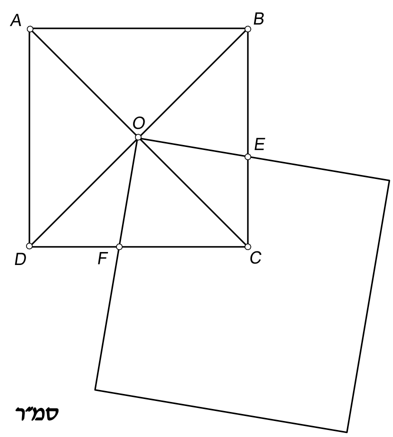
(1) סימון (2) השלמה ל־ 180° במשולש (3) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה

(4) צלעות ריבוע שוות זו לזו (5) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית

(6) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (7) שטח טרפז

---

10. א.



$(1)\ \angle OCE = \angle ODF = 45^{\circ}\ ,\ (2)\ \angle EOC = \angle DOF$

$(3)\ OD = OC \ \stackrel{(4)}{\Rightarrow}\ \mathbf{\Delta OEC \cong \Delta OFD}\ (\checkmark)$

ב.

$S_{\triangle DOC} = S_{\triangle OFD} + S_{\triangle OFC}$

$\stackrel{(5)}{=}\ S_{\triangle OEC} + S_{\triangle OFC} = S_{OFCE}$

$\stackrel{(6)}{\Rightarrow}\ S_{OFCE} = S_{\triangle DOC} \stackrel{(7)}{=} \frac{100}{4} \ \Rightarrow\ \mathbf{S_{OFCE} = 25}$ **סמ"ר**

---

(1) אלכסונים ריבוע חוצים את זוויותיו

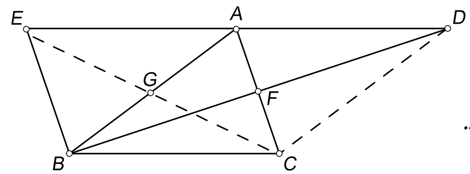
(2) כל אחת משתי הזוויות משלימות את $\angle FOC$ ל־ 90°

(3) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה (4) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית

(5) מהחפיפה שבסעיף א (6) כלל המעבר

(7) אלכסוני ריבוע מחלקים אותו לארבעה משולשים חופפים

11. א.



$(1)\ AF = FC\ ,\ BF = FD$

$\Rightarrow^{(2)}$ **ADCB מקבילית** $(\checkmark)$

ב.

$(3)\ AD \parallel BC \quad \Rightarrow \quad AE \parallel BC$

$(4)\ BC = AD\ ,\ (1)\ AE = AD \ \Rightarrow^{(5)}\ BC = AE \ \Rightarrow^{(6)}$ ACBE מקבילית $\Rightarrow^{(7)}$ $\mathbf{CG = GE}\ (\checkmark)$

ג.

$(1)\ \angle EBD = 90^\circ\ ,\ (1)\ EA = AD \ \Rightarrow^{(8)}\ BA = EA =^{(4)} BC \ \Rightarrow^{(5)}\ \mathbf{BA = BC}\ (\checkmark)$

ד.

$(1)\ BC = AC\ ,\ (4)\ BC = AD \ \Rightarrow^{(5)}\ AC = AD$

$(1)\ AF = \frac{1}{2}\ AC \ \Rightarrow^{(5)}\ AF = \frac{1}{2}\ AD$

$\underline{\triangle AFD:}\ (9)\ \angle F = 90^\circ \ \Rightarrow^{(10)}\ \angle \mathbf{ADF = 30^\circ}$

---

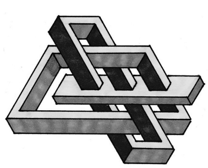
(1) נתון (2) מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית (3) הגדרת מקבילית

(4) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (5) כלל המעבר (6) מרובע שבו זוג צלעות מקבילות זו לזו ושוות זו לזו הוא מקבילית (7) אלכסוני מקבילית חוצים זה את זה

(8) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר

(9) ABCD הוא מעוין (מקבילית שצלעות סמוכות שוות זו לזו). אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה

(10) זווית מול ניצב ששווה למחצית היתר היא בת 30°



כל המספרים 'מעניינים'

כשילד הפלא ההודי **סריניוואסה רמאנוג'ן** (Srinivasa Aiyangar Ramanujan , 1887-1920) חלה ואושפז בבית חולים, ביקר אותו המתמטיקאי האנגלי **גוגפרי הרולד הארדי** (Godfrey Harold Hardy , 1877-1947) וסיפר שמספר המונית שבה הוא הגיע היה 1729, סתם מספר לא מענין.

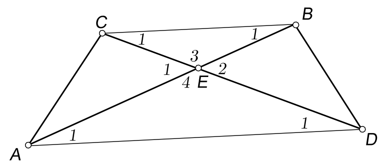
רמאנוג'אן הגיב על כך ואמר שמספר זה הוא דוקא מאוד מענין, כי הוא המספר הקטן ביותר שניתן להציגו בשתי דרכים שונות כחזקות שלישיות של מספרים טבעיים: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

המספר 1 הוא הראשון וכל מספר טבעי מורכב מיחידות של אחד. 2 הוא הזוגי הראשון והזוגי היחידי שהוא גם ראשוני. 3 הוא הלא־זוגי הראשון שהוא ראשוני (1 אינו נחשב ראשוני). 4 הוא המספר הפריק הראשון. לפי הפיתגוראים המספר 5 קשור לנישואים כי הוא סכום של הזוגי הראשון 2 שנחשב נקבי ו־ 3 שנחשב זכרי.

<u>טענה</u>: כל המספרים 'מעניינים'.

<u>הוכחה</u>: בשלילה: נניח שלא כל המספרים 'מעניינים'. נתבונן במספר ה'לא־מענין' הקטן ביותר מבין כל המספרים ה'לא מעניינים'. הרי תכונה ייחודית זו שלו הופכת אותו ל'מענין'. סתירה. מה שהיה להוכיח . . .

17. א.-ב.



$(1)\ AE\cdot EB = CE\cdot ED \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{ED} = \frac{CE}{EB}$

$(2)\ \angle E_1 = \angle E_2 \ , \ \angle E_3 = \angle E_4$

$\Rightarrow^{(3)}\ \mathbf{\triangle AEC \sim \triangle DEB \ , \ \triangle AED \sim \triangle CEB\ (\checkmark)}$

ג.

$(4)\ \triangle AED \sim \triangle CEB \quad \Rightarrow^{(5)}\ \angle B_1 = \angle D_1 \ , \ \angle C_1 = \angle A_1 \ , \ (6)\ \angle C_1 = \angle D_1$

$\Rightarrow^{(7)}\ \angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = \angle D_1 \quad \Rightarrow^{(8)}\ EC = EB \ , \ EA = ED$

$(2)\ \angle E_1 = \angle E_2 \quad \Rightarrow^{(9)}\ \mathbf{\triangle AEC \cong \triangle DEB\ (\checkmark)}$

ד. (1)

$(4)\ \triangle AED \sim \triangle CEB \quad \Rightarrow^{(10)}\ \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{CB} \quad \Rightarrow^{(1)}\ \frac{AE}{3} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad AE = 5_{cm}$

$(11)\ \triangle AEC \cong \triangle DEB \quad \Rightarrow^{(12)}\ AE = DE \quad \Rightarrow^{(7)}\ \mathbf{DE = 5_{cm}}$

(2)

$\underline{\triangle ACE:}\ (13)\ AC^2 + CE^2 = AE^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 + 3^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AC = 4_{cm}}$

---

(1) נתון (2) זוויות קדקודיות שוות זו לזו (3) משפט דמיון צ־ז־צ (4) סעיף ב

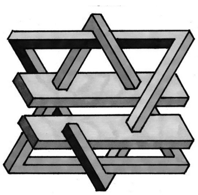
(5) זוויות מתאימות במשולשים דומים

(6) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי, שוות זו לזו (7) כלל המעבר

(8) משולש ששתיים מזוויותיו שוות זו לזו - שווה־שוקיים

(9) משפט חפיפה צ־ז־צ (10) יחס הדמיון (11) סעיף ג

(12) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (13) משפט פיתגורס



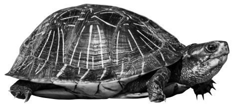
הפרדוקסים של זֵנוֹן – למה אכילס לא ישיג את הצב

זֵנוֹן, פילוסוף יווני, 495–435 לפנה״ס, נהג להציג פרדוקסים מתמטיים רבים.

אחד מהמפורסמים שבהם הוא זה: אכילס והצב עורכים ביניהם תחרות ריצה. אכילס נותן לצב מקדמה של 100 מ׳. אכילס מהיר מהצב פי 10. התחרות מתחילה. כשאכילס עובר 100 מ׳, הצב משיג אותו ב־10 מ׳. כשאכילס עובר את אותם 10 מ׳, הצב משיג אותו במטר. כשאכילס עובר את המטר, משיג אותו הצב ב־10 ס״מ וכך הלאה עד אינסוף. יוצא מכאן, שכל פעם שאכילס ידביק את הפער שבינו לבין הצב – הצב ישיג אותו בעשירית הפער האחרון שהיה ביניהם. אם כך אכילס לא יצליח להשיג את הצב לעולם . . .

מצד שני ברור שהוא ישיג אותו.

נו, טוב, לכן זה פרדוקס . . . (בסוף אכילס מת, בלי קשר לצב).

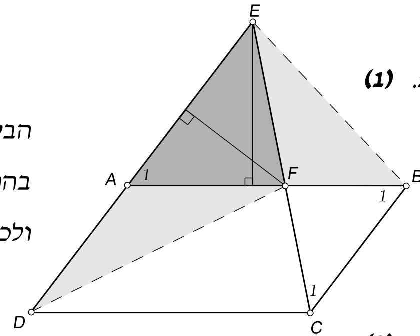


18. א.

$(1)\ \angle A_1 = \angle B_1\ ,\ \angle AEF = \angle C_1 \ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ \triangle BCF \sim \triangle AEF$

$(3)\ \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AE}\ ,\ (4)\ BC = AD \ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{BF}{AF} = \frac{AD}{AE}}\ (\checkmark)$

ב. (1)



הבסיסים AD ו־ AE של המשולשים ADF ו־ AEF בהתאמה, נמצאים על ישר אחד. לכן יש להם אותו גובה. ולכן היחס בין שטחיהם שווה ליחס שבין הבסיסים

$\Rightarrow\ \mathbf{\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}}\ (\checkmark)$

(2)

$(5)\ \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE} \overset{(6)}{=} \frac{BF}{FA} \overset{(7)}{=} \frac{S_{\triangle BFE}}{S_{\triangle AFE}} \ \overset{(8)}{\Rightarrow}\ \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{S_{\triangle BFE}}{S_{\triangle AFE}} \ \Rightarrow\ \mathbf{S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BEF}}\ (\checkmark)$

---

(1) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(2) משפט דמיון זווית־זווית (3) יחס הדמיון (4) צלעות נגדיות במקבילית - שוות זו לזו

(5) מסעיף ב (1) (6) מסעיף א

(7) ראה הסבר בסעיף ב והשלך על הבסיסים FA ו־ FB עבור המשולשים AFE ו־ BFE

(8) כלל המעבר

ריבועי קסם מתנפחים

הריבוע המרכזי שממדיו 3×3 הוא ריבוע קסם.

הריבוע שממדיו 5×5 ש'חובק' אותו - גם הוא ריבוע קסם !

הריבוע שממדיו 7×7 ש'חובק' את שני הריבועים הקודמים - גם הוא ריבוע קסם !!

והריבוע שממדיו 9×9 ש'חובק' את שלושת הריבועים הקודמים - גם הוא ריבוע קסם !!!

5	80	59	73	61	3	63	12	13
1	20	55	30	57	28	71	26	81
4	14	31	50	29	60	35	68	78
76	58	46	38	45	40	36	24	6
7	65	33	43	41	39	49	17	75
74	64	48	42	37	44	34	18	8
67	10	47	32	53	22	51	72	15
66	56	27	52	25	54	11	62	16
69	2	23	9	21	79	19	70	77

.24 (806, קיץ תשע"ג - 2013, מועד א)

א. הוכח: משולש ששני תיכונים שלו שווים זה לזה, הוא שווה־שוקיים.

ב. במשולש ABC הנקודות L, M ו־ K

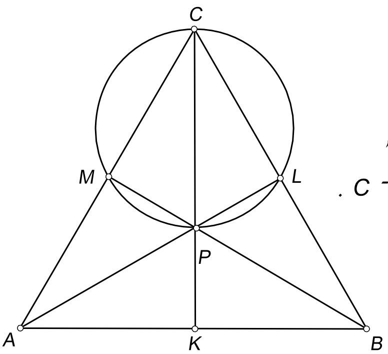
הן אמצעי הצלעות CB, CA ו־ AB בהתאמה.

הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש,

והיא נמצאת על מעגל העובר דרך הנקודות L, M ו־ C.

נתון גם כי $AL = BM$. **(75)**

הוכח: **(1)** $BM \perp AC$ **(2)** $AK = AM$



.25 (806, קיץ תשע"ג - 2013, מועד ב)

נתונה מקבילית $ABCD$.

הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F.

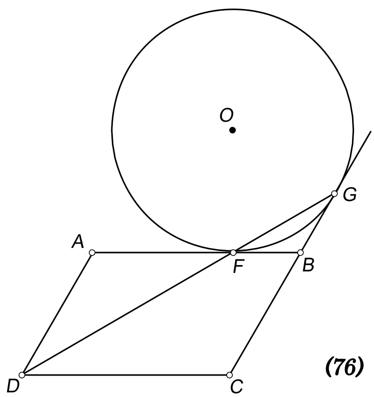
המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G.

$AF = AD$.

א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG.

ב. נתון גם: $BO = BC$, $FC \perp DC$.

הוכח: **(1)** $OF = FC$ **(2)** $FB = \frac{1}{2} BO$ **(76)**



.26 (806, חורף תשע"ד - 2014)

משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל.

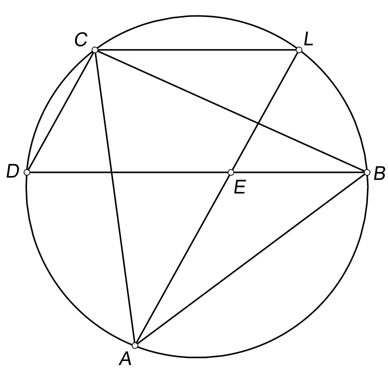
נקודות D ו־ L נמצאות על המעגל, כך ש־ $LC \parallel BD$.

המיתרים AL ו־ BD נחתכים בנקודה E.

א. הוכח כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית.

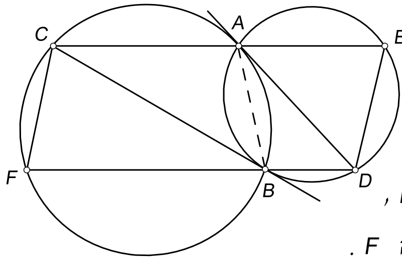
ב. הוכח: **(1)** $\triangle ADE$ הוא שווה־צלעות.

(2) $LC + LB = LA$. **(77)**



בכל התנ"ך כולו, יש רק פסוק אחד, המכיל את כל אותיות הא"ב, כולל כל האותיות הסופיות (מנצפ"ך).
הפסוק הוא בצפניה (מתרי עשר הנביאים) בפרק ג' פסוק ח'.
הפסוק אינו מובא כאן מפאת קדושתו, והקורא מוזמן לעיין שם.
שני פסוקים בתורה המכילים את כל אותיות הא"ב (לא כולל מנצפ"ך)
הם בספר דברים ד ל"ד ובספר שמות: ט"ז ט"ז

27. (806 , סתיו תשע"ה - 2014 , מועד ד)



שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B .

המיתר AD משיק למעגל השמאלי בנקודה A .

המיתר CB משיק למעגל הימני בנקודה B .

המשך המיתר CA חותך את המעגל הימני בנקודה E ,

והמשך המיתר DB חותך את המעגל השמאלי בנקודה F .

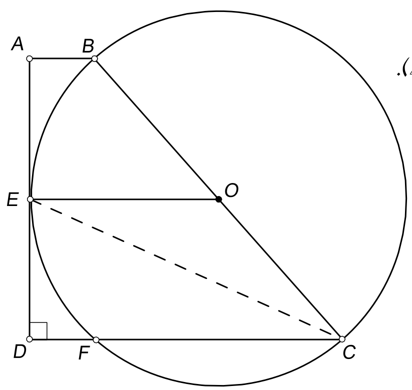
א. הוכח: $\angle AED + \angle FCA = 180^\circ$.

ב. הוכח: המרובע $CEDF$ הוא מקבילית.

ג. נתון: $BD = 4_{cm}$, $AC = 9_{cm}$.

מצא פי כמה גדול שטח $\triangle ABC$ משטח $\triangle BDA$. **(78)**

28. (581 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א)



נתון מעגל שמרכזו O .

$ABCD$ הוא טרפז ישר־זווית ($AB \parallel DC$, $\angle ADC = 90^\circ$).

הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E ,

והנקודות B ו־ C נמצאות על המעגל,

כך ש־ BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F.

א. הוכח: $\angle BCD = 2\angle DEF$.

ב. הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle DFE$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$. **(79)**

הזמן האבוד

מה קרה בין 5.10.1582 **לבין** 14.10.1582 ?

התשובה היא: כלום, אבל ממש כלום. תינוק לא נולד , עוף לא פרח, ציפור לא צייצה ואפילו השמש לא זרחה אז.

בעקבות אי התאמה לעונות השנה שהצטברה בלוח הגרגוריאני במשך שנים,

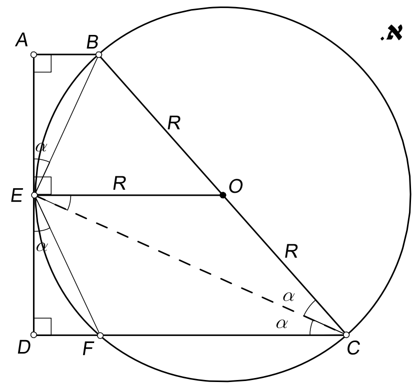
החליט האפיפיור גרגיוס ה־13 למחוק(!) מלוח השנה 10 ימים,

כך שהתאריך שלאחר 4.10.1582 **היה** 15.10.1582.

תשובות

27. **ג.** $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BDA} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

28. א.



$(1)\ \angle OEA = 90^\circ \overset{(2)}{=} \angle EDC \overset{(3)}{\Rightarrow} EO \parallel DF$

$\angle DEF \overset{(4)}{=} \angle ECF \overset{(5)}{=} \angle CEO \overset{(6)}{=} \angle OCE \overset{(7)}{=} \alpha$

$\angle BCD = \angle ECF + \angle OCE = \alpha + \alpha = 2\alpha = 2\angle DEF$

$\overset{(8)}{\Rightarrow} \mathbf{\angle BCD = 2\angle DEF}\ (\checkmark)$

ב.

$(9)\ \underline{BE = FE}\ ,\ (4)\ \underline{\angle AEB} = \angle ECB = \underline{\angle DEF}$

$(2)\ \angle A = \angle D = 90^\circ\ ,\ (10)\ \underline{\angle EBA = \angle EFD} \overset{(11)}{\Rightarrow} \mathbf{\triangle ABE \cong \triangle DFE}\ (\checkmark)$

ג.

$(2)\ BC = 2R = 2OE\ ,\ (12)\ AB = DF\ ,\ AE = ED$

$(13)\ OE = \frac{AB+DC}{2} \Rightarrow 2\,OE = AB + DC \overset{(14)}{\Rightarrow} \mathbf{BC = DF + DC}\ (\checkmark)$

---

(1) זווית בין משיק למעגל למיתר היא ישרה (2) נתון

(3) אם זוויות מתאימות שוות בישרים הנחתכים על־ידי ישר שלישי - הישרים מקבילים זה לזה

(4) זווית בין משיק למעגל למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר

(5) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי - שוות זו לזו

(6) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים - שוות זו לזו $(OE = OC = R)$ (7) סימון

(8) כלל המעבר (9) זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים

(10) השלמה ל־ 180° במשולש (11) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית

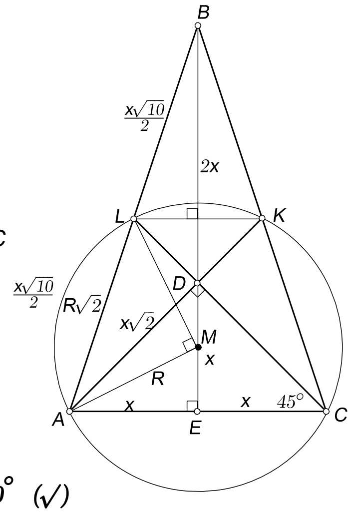
(12) צלעות מתאימות במשולשים חופפים

(13) $BO = OC = R$ לכן OE קטע אמצעים בטרפז ולכן שווה למחצית סכום בסיסיו (14) הצבה

$$4^2 = 16$$
$$34^2 = 1156$$
$$334^2 = 111556$$
$$3334^2 = 11115556$$
$$33334^2 = 1111155556$$
$$\vdots$$

$$3334^3 = 037,059,263,704$$
$$037 + 059 + 263 + 704 = 1000$$

29. א.



$AE \overset{(1)}{=} EC \overset{(2)}{=} x \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad DE = x$

$BD \overset{(4)}{=} 2\,DE = 2x = AC \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{BD = AC}$

ב.

$LK \overset{(6)}{=} \frac{1}{2}AC = x$, (7) $LK \parallel AC$, (8) $BE \perp AC$

(9) $LK \perp BE \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad S_{BLDK} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{S_{BLDK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}}$

ג. (1)

$\angle ECD \overset{(11)}{=} \angle EDC \overset{(12)}{=} 45^\circ \quad \overset{(13)}{\Rightarrow} \quad \angle \mathbf{AML = 90^\circ}$ (✓)

(2) R - רדיוס המעגל החוסם את ACKL

<u>$\triangle BEA$:</u> $AB \overset{(15)}{=} \sqrt{x^2 + (3x)^2} = \sqrt{10x^2} = x\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad AL = \frac{AB}{2} = \frac{x\sqrt{10}}{2}$

<u>$\triangle AML$:</u> $AL \overset{(15)}{=} \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} \quad AL = \frac{x\sqrt{10}}{2} = R\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{x\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}$

<u>$\triangle DEA$:</u> $AD \overset{(15)}{=} \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

$\frac{AM}{AD} = \frac{R}{x\sqrt{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}}{x\sqrt{2}} = \frac{\cancel{x}\sqrt{10}}{\cancel{x}\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2 \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{4}}$

---

(1) בנית עזר: BE תיכון לבסיס ולכן עובר דרך D, מפגש התיכונים (2) סימון

(3) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר

(4) מפגש תיכונים מחלק אותם ביחס של 2 : 1, כשהחלק הגדול קרוב לקדקוד (5) כלל המעבר

(6) LK קטע אמצעים במשולש, ולכן שווה למחצית הצלע השלישית

(7) קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית

(8) תיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה

(9) כלל המעבר בניצבות (אפשר גם שוויון זוויות מתאימות)

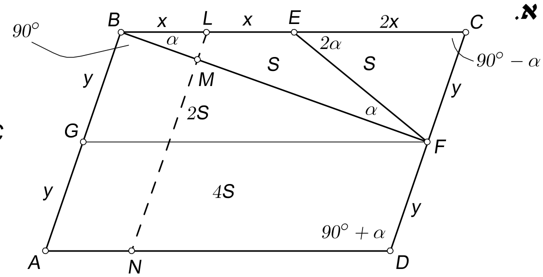
(10) שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה שווה למחצית מכפלת אלכסוניו (BLDK דלתון)

(11) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים ($\triangle DEC$) שוות זו לזו (12) השלמה ל־ 180° במשולש

(13) זווית מרכזית במעגל שווה לפעמיים זווית היקפית הנשענת על אותה קשת

(14) תיכונים לשוקיים במשולש שווה־שוקיים, שווים זה לזה (15) פיתגורס

27. א.



$(1)\ S_{\triangle EBF} = S_{\triangle ECF} = S$

$(2)\ FG \parallel BC\ ,\ (3)\ BG = CF\ ,\ GF = BC$

$(4)\ BF = BF \quad \Rightarrow^{(5)} \triangle BGF \cong \triangle FCB$

$\Rightarrow \quad S_{\triangle BGF} = S_{\triangle FCB} = 2S$

$S_{BCFG} = S + S + 2S = 4S\ ,\ (6)\ S_{ADFG} = S_{BCFG} = 4S \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{ABCD} = 8S}$ **(יחידות ריבועיות)**

אפשר גם (אולי אפילו יותר קל): לבנות את האלכסון BD (במקום GF).

להשתמש פעמיים בתכונת החלוקה השווה של שטח המשולש על־ידי תיכון:

פעם על $\triangle FBC$ ופעם על $\triangle DBC$. עם $\triangle BDC \cong \triangle DBA$ - התשובה מתקבלת בקלות.

ב.

$(7)\ BL = x\ ,\ CF = y\ ,\ (8)\ \frac{BL}{BC} = \frac{LM}{CF} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4x} = \frac{LM}{y} \quad \Rightarrow \quad LM = \frac{y}{4}$

$(3)\ LN = CD = 2y \quad \Rightarrow \quad MN = 2y - \frac{y}{4} = \frac{7y}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{LM}{MN} = \frac{\frac{y}{4}}{\frac{7y}{4}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}}$

ג.

$(7)\ \angle EBF = \alpha \quad \Rightarrow^{(9)} \angle EFB = \alpha \quad \Rightarrow^{(10)} \angle CEF = 2\alpha$

$\Rightarrow^{(9,11)} \angle ECF = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$(12)\ \angle D = 90^\circ + \alpha\ ,\ (13)\ \angle ABC = \angle D = 90^\circ + \alpha \quad \Rightarrow \quad \angle ABF = 90^\circ$

$\angle D + \angle ABF = (90^\circ + \alpha) + 90^\circ = 180^\circ + \alpha \neq 180^\circ \quad \Rightarrow^{(14)}$ **<u>לא</u>**

---

(1) תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי־שטח (2) בניית עזר

(3) $BCFG$ מקבילית ע"פ הגדרה. צלעות נגדיות במקבילית - שוות זו לזו

(4) צלע משותפת (5) משפט חפיפה צלע־צלע־צלע

(6) נתון: $CF = FD$ ולכן שתי המקביליות חופפות

(7) סימונים (8) תאלס מורחב (9) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו

(10) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה

(11) השלמה ל־ 180° במשולש (12) השלמה של $\angle C$ ל־ 180° (חד־צדדיות במקבילים)

(13) זוויות נגדיות במקבילית - שוות זו לזו

(14) תנאי הכרחי (ומספיק) לחסימת ריבוע במעגל הוא השלמה ל־ 180° של זוויות נגדיות במרובע

פונקציות רציונאליות - שאלות

1. (006 , קיץ תשס"ד - 2004 , מועד ב')

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{Ax-x^2-16}{Bx^2}$ (A ו־ B פרמטרים).

הישר $y=-1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה.

שיפוע הישר, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=-2$, הוא -6.5.

א. מצא את הערך של B ואת הערך של A. **(148)**

ב. הצב את הערכים של A ו־ B, ומצא עבור $f(x)$ את:

(1) תחום ההגדרה **(2)** נקודות החיתוך עם הצירים

(3) האסימפטוטות המקבילות לצירים **(4)** נקודות הקיצון וסוגן

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

2. (006-806 , חורף תשע"א - 2011)

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$, $a>0$ פרמטר.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך) את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה

(2) תחומי עליה וירידה של הפונקציה. **(149)**

(3) שיעורי x של נקודות הפיתול של הפונקציה. נמק.

(4) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הסבר את השינויים בגרף הפונקציה עבור $a<0$:

(1) בתחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) בתחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(3) בנקודות הפיתול של הפונקציה.

תשובות

1. **א.** $A=10\ ,\ B=1$

ב. **(1)** $x\neq 0$ **(2)** $(2,0)\ (8,0)$ **(3)** $x=0\ ,\ y=-1$ **(4)** $max:\ (3\frac{1}{5},\frac{9}{16})$

2. **א.** **(1)** $\forall x$ **(2)** $\underline{\nearrow}:\ x>0\ ,\ \underline{\searrow}:\ x<0$ **(3)** $x=\pm\sqrt{a}$ **(4)** $(0,-1\frac{1}{3})$ **(5)** $y=0$

ג. **(1)** $x\neq\pm\sqrt{-3a}$ **(2)** $\underline{\searrow}:\ (0<x<\sqrt{-3a})\cup(x>\sqrt{-3a})\ ,\ \underline{\nearrow}:\ (x<-\sqrt{-3a})\cup(-\sqrt{-3a}<x<0)$ **(3)** אין

2. א. (1)

$$f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1 \quad , \quad x^2+3a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\neq -3a \quad , \quad a>0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, \mathbf{x}$$

(2)

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3a)-2x(x^2-a)}{(x^2+3a)^2}=\frac{2x((x^2+3a)-(x^2-a))}{(x^2+3a)^2}=\frac{2x\cdot 4a}{(x^2+3a)^2}=\boxed{\frac{8ax}{(x^2+3a)^2}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

x		0	
f'	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$
f	↘	min	↗

$\Rightarrow$ $\underline{\searrow}$**:** $\mathbf{x<0}$ **,** $\underline{\nearrow}$**:** $\mathbf{x>0}$

(3)

$$f''(x)=\frac{8a(x^2+3a)^2-2(x^2+3a)\cdot 2x\cdot 8ax}{(x^2+3a)^4}=\frac{8a(x^2+3a)((x^2+3a)-4x^2)}{(x^2+3a)^4}=\boxed{\frac{8a(3a-3x^2)}{(x^2+3a)^3}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{a}$$

x		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$	
y''	$\frac{+\,-}{+}=-$	0	$\frac{+\,+}{+}=+$	0	$\frac{+\,-}{+}=-$
y	⌢	inf.	⌣	inf.	⌢

$\Rightarrow$ $\mathbf{x=\pm\sqrt{a}}$

(4)

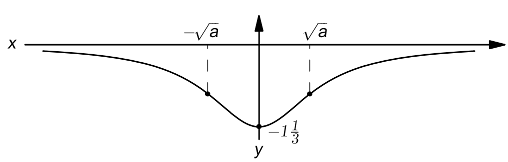
$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-a}{3a}-1=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0\ ,\ -1\tfrac{1}{3})}$$

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-a}{x^2+3a}-1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-a=x^2+3a \quad \Rightarrow \quad 4a=0 \ ,\ a>0 \quad \Rightarrow \quad \emptyset$$

(5)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}(1-\frac{a}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{3a}{x^2})}-1\right)=\frac{1-0}{1+0}-1=1-1=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=0}$$

ב.



ג. (1)

$$f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1 \quad , \quad x^2+3a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\neq -3a \quad , \quad a<0 \quad \Rightarrow \quad -3a>0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x\neq\pm\sqrt{-3a}}$$

(2)

$$\boxed{f'(x)=\frac{8ax}{(x^2+3a)^2}}$$

x		$-\sqrt{-3a}$		0		$\sqrt{-3a}$	
f'	$\frac{-\,-}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{-\,-}{+}=+$	0	$\frac{-\,+}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{-\,+}{+}=-$
f	↗	asy.	↗	max	↘	asy.	↘

$\Rightarrow$ $\underline{\nearrow}$**:** $\mathbf{(x<-\sqrt{-3a})\cup(-\sqrt{-3a}<x<0)}$ **,** $\underline{\searrow}$**:** $\mathbf{(0<x<\sqrt{-3a})\cup(x>\sqrt{-3a})}$

(3)

$$f''(x)=\frac{24a(a-x^2)}{(x^2+3a)^3}\overset{?}{=}0 \ ,\ a<0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\emptyset}$$ **(אין נקודות פיתול)**

3. א. (1)

$f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$, $(1)\ \ x-2\neq 0 \ \Rightarrow\ x\neq 2$

$(2)\ \ (x+1)(x-a)\geq 0 \ \Rightarrow$ (+ −1 − a +) $\Rightarrow\ (x\leq -1)\cup(x\geq a)$

$(1)\cap(2)\ \Rightarrow\ \mathbf{(x\leq -1)\cup(x\geq a)}$

(2)

$x\neq 0\ ,\ y=0 \ \Rightarrow\ (x+1)(x-a)=0 \ \Rightarrow\ x_1=-1\ ,\ x_2=a \ \Rightarrow\ \mathbf{(-1,0)\ ,\ (a,0)}$

(3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-ax-a}}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}}}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1 \ \Rightarrow\ \mathbf{y_{\rightarrow}=1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-ax-a}}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{-1}{|\cancel{x}|}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}}}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}=-1 \ \Rightarrow\ \mathbf{y_{\leftarrow}=-1}$$

ב.

$$f(a+2)=-f(2-a)\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{(a+3)\cdot 2}}{a}=-\frac{\sqrt{(3-a)(2-2a)}}{-a}\ \Rightarrow\ 2(a+3)=(3-a)(2-2a)\ \ /:2$$

$$a+3=3-3a-a+a^2\ \Rightarrow\ a^2-5a=0\ \Rightarrow\ a(a-5)=0\ ,\ a>2\ \Rightarrow\ \mathbf{a=5}$$

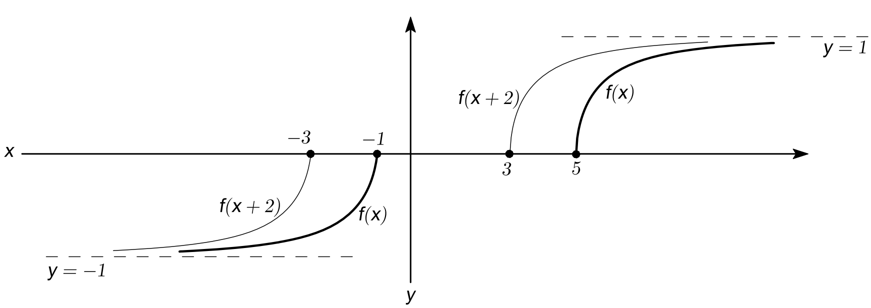
ג. (1)

$$\mathbf{f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)(x-5)}}{x-2}}=\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x-2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\cancel{2}x-\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4x-5}}\cdot(x-2)-1\cdot\sqrt{x^2-4x-5}}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+4-x^2+4x+5}{(x-2)^2\sqrt{x^2-4x-5}}=\frac{9}{(x-2)^2\sqrt{x^2-4x-5}}>0\ \Rightarrow\ \nearrow:\ \mathbf{(x<-1)\cup(x>5)}\ ,\ \searrow:\ \mathbf{\emptyset}$$

ג. (2) - ד.

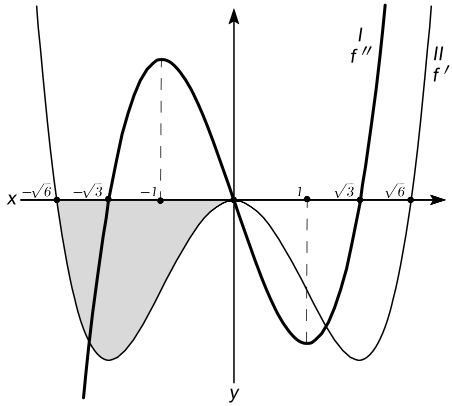


הגרף של $f(x+2)$ הוא הסטת שתי שְׁנָתוֹת שמאלה של גרף $f(x)$.

מה המשותף לשמות הבאים: אַיָּה , דִּקְלָה , הוֹדִיָּה , זְמִירָה , לְבָנָה , נֹגַהּ , עֲנָת , עָפְרָה , תִּקְוָה ?

תשובה (בצופן א"ת ב"ש): לפכי ביפא בכ רשגמי שאטל.

4. א.



$I(\mp\sqrt{3})=0$ ומשנה סימן $(- \to +)$

באותה סביבה. $II(\mp\sqrt{3})=min$.

$I(0)=0$ ומשנה סימן $(+ \to -)$

באותה סביבה. $II(0)=max$.

המצב ההפוך אינו מתקיים:

$II(\pm\sqrt{6})=0$ ומשנה סימן באותן סביבות,

אבל $I(\pm\sqrt{6}) \neq extremum$

מסקנה: $II'(x)=I(x)$ ולכן: $II \leftrightarrow f'$, $I \leftrightarrow f''$

ב. (1)

x	-2.5		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		2.5
f'		+	0	−	0	−	0	+	
f		↗	max	↘	infl.	↘	min	↗	

⇒ **שתים**

(2)

x	-2.5		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2.5
f''		−	0	+	0	−	0	+	
f		⌢	infl.	⌣	infl.	⌢	infl.	⌣	

⇒ **שלוש**

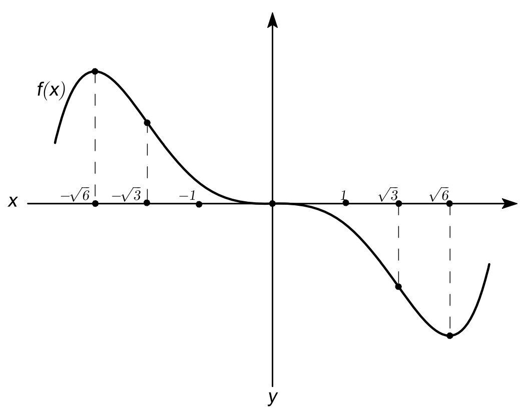
ג. שיפוע המשיק של f' הוא f'' . בתחום זה המינימום של f'' מתקבל עבור $\boldsymbol{x=1}$.

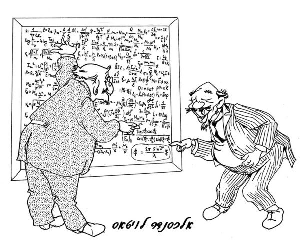
ד. בגלל אי־זוגיות של $f(x)$

(וגם בגלל רציפותה.

לא נתון, אבל זו הנחת העבודה),

מתקיים: $f(0)=0$.





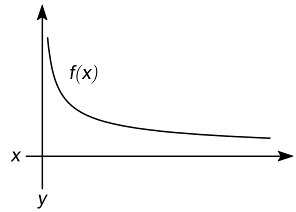
ירושלים של זהב

את השיר המיתולוגי 'ירושלים של זהב' כתבה והלחינה נעמי שמר, שבועות ספורים לפני שחרור העיר.
הביצוע נמסר לזמרת אלמונית אז - שולי נתן.
שמה הפרטי של שולי 'שולי' ושם משפחתה של נעמי 'שמר' - נמצאות כולן בשם העיר 'ירושלים'.
גם כל שם העיר 'ירושלים' נמצא בשמן.

5. א. (1) לפונקציית שורש ריבועי יש קיצון ומאותו סוג כמו לריבועָה באותם שיעורי x.

$A(x,\frac{4}{\sqrt{x}})$. המרחק AO הוא $\sqrt{x^2+\frac{16}{x}} = \sqrt{(x-0)^2+(\frac{4}{\sqrt{x}}-0)^2}$.

מטעמי נוחות, נעבוד עם ריבוע המרחק:



$$AO^2 = d(x) = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$d'(x) = \boxed{2x - \frac{16}{x^2}} \stackrel{?}{=} 0 \quad / \cdot x^2$$

$$2x^3 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

x	0		2	
d'		$-$	0	$+$
d		$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\Rightarrow \quad x_A = 2 \quad \Rightarrow \quad y_A = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A\ (2, 2\sqrt{2})}$$

(2)

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad , \quad f'(x) = (4x^{-\frac{1}{2}})' = 4\cdot(-\tfrac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\underset{\text{(משיק)}}{m_{tangent}} = f'(2) = -2\cdot 2^{-\frac{3}{2}} = -2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

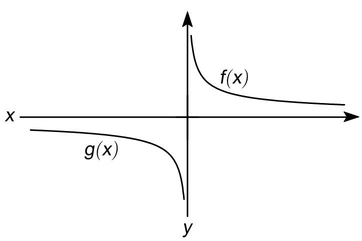
$$m_{AO} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad m_{tangent}\cdot m_{AO} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{tangent \perp AO} \quad (\checkmark)$$

ב. (1) הגרף של $g(x) = -f(-x)$ הוא שיקוף של $f(x)$

כשציר הסימטריה הוא הישר $y = -x$.

לכן שיעור x של הנקודה הקרובה ביותר

על גרף $g(x)$ לראשית הצירים הוא $x = -2$



$$f(2) = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad g(-2) = -2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(-2, -2\sqrt{2})}$$

(2) מטעמי הסימטריה, ניתן לבדוק עבור $f(x)$ בתחום $1 \le x \le 4$.

מהטבלה לעיל המקסימום יהיה מקסימום־קצה, או ב־ $x = 1$ או ב־$x = 4$

$$d(1) = 1 + 16 = 17 \quad , \quad d(4) = 16 + 4 = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$g(x) = -f(-x)$$

$$\Rightarrow \quad x = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -f(-(-4)) = -f(4) = -\frac{4}{\sqrt{4}} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(-4, -2)}$$

> *שני ימי זכרון סמוכים כל שנה (יום הזכרון לשואה ויום הזכרון לחללי צה"ל),*
> *לטובת החישוב הכללי: כמה עולה לנו עם מדינה וכמה עולה לנו בלי (צור ארליך)*

6. א. (1)

$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \quad , \quad x+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \neq -1}$

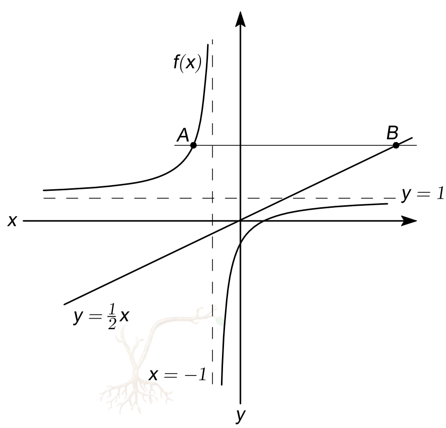
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1 - \frac{2}{\to 0} = 1 - \infty = \infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = -1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 - \frac{2}{\infty} = 1 - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1}$

(2)

$f'(x) = 0 - (-\frac{2}{(x+1)^2}) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \ \ \forall \ \{x \neq -1\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\nearrow}: \ \boldsymbol{x \neq -1} \ \ , \ \ \underline{\searrow}: \ \boldsymbol{\emptyset}$

(3)



ב.

$A(t, 1 - \frac{2}{t+1}) \quad , \quad y_B = y_A = 1 - \frac{2}{t+1} = \frac{1}{2} x_B \quad \Rightarrow \quad x_B = 2 - \frac{4}{t+1}$

$AB = x_B - x_A = (2 - \frac{4}{t+1}) - t$

$d(t) = 2 - \frac{4}{t+1} - t$

$d'(t) = \boxed{\frac{4}{(t+1)^2} - 1} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad (t+1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t+1 = \pm 2 \ \ , \ \ t < -1 \quad \Rightarrow \quad t = -3$

t		-3		-1
d'	$-$	0	$+$	
d	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{t = -3}$

ילדים מתמטיקאים

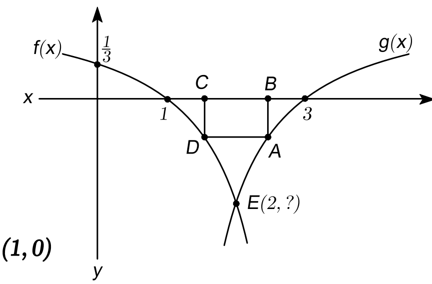
מרטין גרדנר (1914–2010) היה מלך החידות האמריקאי בדור האחרון.
כתב עשרות ספרים וטורים בעיתונות שעסקו במדע פופולארי,
בחידות מתמטיות, חידות חשיבה ובקסמים.
אמרו עליו שהוא הפך הרבה ילדים למתמטיקאים, והרבה מתמטיקאים לילדים . . .

7. א. (1)

$f(x)=\frac{x-1}{x-3}\quad,\quad x-3\neq 0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x\neq 3}$

$g(x)=\frac{x-3}{x-1}\quad,\quad x-1\neq 0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x\neq 1}$

(2)



$\underline{f:}\quad x=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(0,\frac{1}{3})}$

$y=0\quad\Rightarrow\quad x-1=0\quad\Rightarrow\quad x=1\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(1,0)}$

$\underline{g:}\quad x=0\quad\Rightarrow\quad y=3\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(0,3)}$

$y=0\quad\Rightarrow\quad x-3=0\quad\Rightarrow\quad x=3\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(3,0)}$

ב. לפי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר x ,

הגרף היורד הוא של $f(x)$ והגרף העולה הוא של $g(x)$.

$\underline{x_E:}\quad \frac{x-1}{x-3}=\frac{x-3}{x-1}\quad\Rightarrow\quad x^2-2x+1=x^2-6x+9\quad\Rightarrow\quad 4x=8\quad\Rightarrow\quad x_E=2$

$x_E<t<3\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{2<t<3}$

ג. (1)

$x_A=t\quad\Rightarrow\quad y_A=g(t)=\frac{t-3}{t-1}<0\quad\Rightarrow\quad AB=-\frac{t-3}{t-1}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{AB=\frac{t-3}{1-t}}$ **(יחידות אורך)**

(2)

$x_D=k\quad,\quad y_D=y_A=\frac{t-3}{t-1}=f(k)\quad\Rightarrow\quad \frac{k-1}{k-3}=\frac{t-3}{t-1}\quad\Rightarrow\quad kt-k-t+1=kt-3k-3t+9$

$\Rightarrow\quad 2k=8-2t\quad\Rightarrow\quad k=4-t\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x_D=4-t}\ (\surd)$

(3)

$BC=AD=x_A-x_D=t-(4-t)=2t-4$

$S_{ABCD}=AB\cdot AD=\frac{t-3}{1-t}\cdot(2t-4)\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{S_{ABCD}=\frac{2t^2-10t+12}{1-t}}$ **(יחידות ריבועיות)**

ד.

$S(t)=\frac{2t^2-10t+12}{1-t}$

$S'(t)=\frac{(4t-10)(1-t)-(-1)\cdot(2t^2-10t+12)}{(1-t)^2}=\frac{4t-4t^2-10+10t+2t^2-10t+12}{(1-t)^2}=\boxed{\frac{-2t^2+4t+2}{(1-t)^2}}\overset{?}{=}0$

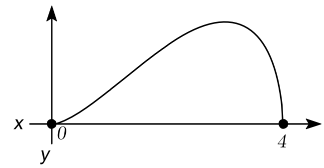
$-2t^2+4t+2=0\quad\Rightarrow\quad t^2-2t-1=0\quad\Rightarrow\quad t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$t>0\quad\Rightarrow\quad t=1+\sqrt{2}$

t	2		$1+\sqrt{2}$		3
S'		$\frac{+}{+}=+$	0	$\frac{-}{+}=-$	
S		↗	max	↘	

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{t=1+\sqrt{2}}$

8. א. (1)



$f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$

$f(4)=0 \quad\Rightarrow\quad 256a+64b=0$

$\Rightarrow\quad 64b=-256a \quad\Rightarrow\quad \mathbf{b=-4a}\ \ (\surd)$

(2)

$f(1)>0 \quad\Rightarrow\quad a+b>0 \quad\Rightarrow\quad a-4a>0 \quad\Rightarrow\quad -3a>0 \quad\Rightarrow\quad \underline{a<0}$

$a<0 \quad\Rightarrow\quad -4a>0 \quad\Rightarrow\quad \underline{b>0} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{II}$

ב.

$P\ \in\ f^2(x) \quad\Rightarrow\quad P(x,ax^4+bx^3) \quad\Rightarrow\quad P(x,ax^4-4ax^3)$

$\Rightarrow\quad M(x,0) \quad\Rightarrow\quad OM=x\ ,\ PM=ax^4-4ax^3$

$S(x)=S_{\triangle PMO}=\frac{OM\cdot PM}{2}=\frac{x\cdot(ax^4-4ax^3)}{2}=\frac{1}{2}(ax^5-4ax^4)$

$S'(x)=\frac{1}{2}(5ax^4-16ax^3)=\frac{ax^3}{2}(5x-16)\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0\ ,\ x_2=\frac{16}{5}$

$S''(x)=\frac{1}{2}(20ax^3-48ax^2)=2ax^2(5x-12)$

$S''(\frac{16}{5})=2\cdot(-)\cdot(+)(5\cdot\frac{16}{5}-12)=2\cdot(-)\cdot(+)\cdot(+)<0 \quad\Rightarrow\quad max\ \ (\surd) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=3\frac{1}{5}}$

ג.

$S_{max}=S(\frac{16}{5})=\frac{1}{2}(a\cdot(\frac{16}{5})^5-4a\cdot(\frac{16}{5})^4) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_{max}=-41.94304a}$ **(יחידות ריבועיות)**

ד.

$f^2(x)\ \searrow\!\!\!\!\!\!\times \quad\Rightarrow\quad (f^2(x))'\geq 0 \quad\Rightarrow\quad (ax^4-4ax^3)'\geq 0$
(לא יורדת)

$\Rightarrow\quad 4ax^3-12ax^2\geq 0\ \ /:4ax^2\ \ (<0) \quad\Rightarrow\quad x-3\leq 0 \quad\Rightarrow\quad x\leq 3$

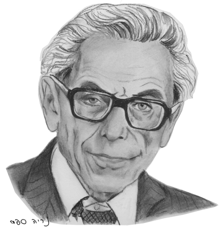
בתחום $0<x<3.2$ פונקצית שטח המשולש עולה.

לכן, בתחום $0<x\leq 3$ פונקצית השטח תקבל ערך מקסימלי בקצה, כלומר עבור $\mathbf{x=3}$.

כשהשלמות היא סטנדרט

מפעל בארה"ב הזמין ברגים ממפעל ביפן. בטופס ההזמנה השגרתי של החברה המזמינה, צוין שהחברה תקבל עד 3% ברגים פגומים. כשהגיעה ההזמנה לארה"ב - הם קיבלו מכולה גדולה עם הברגים ועוד ארגז נפרד נוסף שעליו צוין: "3% ברגים פגומים" . . .

פול אֶרדֶש - סיפורו של נזיר מתמטי



פול ארדש, יהודי הונגרי, 1913–1996, עילוי מתמטי. שני הוריו היו מורים למתמטיקה. בגיל שלוש כבר הכפיל בע"פ מספרים בני שלוש ספרות. אז גם גילה את קיומם של המספרים השליליים. בגיל 21 קיבל תואר ד"ר במתמטיקה מאוניברסיטת בודפשט. היה חבר בסגל המתמטי במנצ'טסר, אנגליה. עם פרוץ מלחמת העולם השניה היגר לארה"ב, המקום הבטוח ליהודים באותה עת.

ארדש הקדיש את כל חייו למתמטיקה עד כדי איבוד ענין בכל תענוגות העולם. גם כשמת, בגיל 83, 1996, היה זה עת עמל על משוואה. ארדש היה רווק, צרך גלולות קפאין, אספרסו ואפילו אמפטינים (סוג של סם) ע"מ להגביר את יכולתו האינטלקטואלית. הוא היה חסר רכוש כלשהו מכיון שלדבריו 'נכסים הם מטרד'. לא היה לו בית, מכונית או חשבון בנק. היתה לו מזוודה קטנה, בה ארז את כל מלבושיו. כל מלבושיו היו ממשי בגלל רגישותו הפיזית למגע כלשהו. את ידיו רחץ עשרות פעמים ביום.

ארדש היה הדמות הקלאסית של הפרופסור המפוזר. הוא היה חותך פירות עם החלק הקהה של הסכין ומלכלך את סביבתו. בגיל 21 מרח בפעם הראשונה חמאה על פרוסת לחם בעצמו. עד אז היו עושות לו זאת אמו או המשרתת. רק בגיל 11 שרך לראשונה את נעליו בעצמו, ועדיין התקשה בקשירת שרוכי נעליו. לא פעם נעזר לשם כך בחבריו. היתה לו הליכה מוזרה, כשל קוף. גבו היה כפוף וזרועותיו מתנפנפות. הליכתו היתה מהירה מאוד. לעיתים היה רץ לעבר קיר, נעצר מולו בפתאומיות, מסתובב ורץ חזרה. פעם החמיץ את עצירתו מול הקיר, פגע בו ונפגע. לא פעם איבד את דרכו. הוא איבד את ראייתו באחת מעיניו מכיון שסרב לקבל טיפול רפואי מחשש לאיבוד הזמן שבו עסק במתמטיקה. רק לאחר התעקשותם של אחד מידידיו המתמטיקאים ואשתו הסכים לניתוח השתלת קרנית. מתמטיקאי מממפיס הוזעק לחדר הניתוח על מנת שארדש יוכל לשוחח איתו בנושאים מתמטיים בזמן הניתוח. כשהחלים מהתקף לב שוכן בבית חולים עם חדר גדול על מנת להכיל את כל מבקריו. ארדש ניהל בחדרו שלוש שיחות מתמטיות בעת ובעונה אחת, בשלוש שפות, עם שלוש קבוצות שונות ששהו בחדרו: בהונגרית, בגרמנית ובאנגלית. במעמד זה דרש מהרופאים שבאו לבודקו לחזור רק לאחר מספר שעות. הם נענו לו.

הוא ניהל התכתבות ענפה עם מתמטיקאים רבים בעולם. תחילת מכתב טיפוסי שלו: "הואה (מתמטיקאי סיני) היקר, נניח ש־p הוא מספר ראשוני אי זוגי . . . "

בשנות החמישים, בתקופה בה רדפו בארה"ב את אוהדי הקומוניזם ('מקארתיזם', ע"ש הסנטור מקארטי), התעמת עם פקידים אמריקאים שתיחקרו אותו על דעותיו בנושא. כשהביע דעה ניטרלית, תוך ציון ערכו של קארל מרקס, נשללה ממנו אשרת הכניסה לארה"ב. את סוף שנות החמישים העביר בישראל.

הוא התקיים מהרצאות במתמטיקה, אותן הירצה ברחבי העולם. בביקוריו בחו"ל התאכסן אצל מתמטיקאים מקומיים. את דמי האירוח שילם בהברקותיו המתמטיות. ארדש השפיע לא מעט על המתמטיקה של המאה העשרים. הוא גילה את המספרים הדיסקרטיים, שהם הבסיס למדעי המחשב. היה אשף בתורת המספרים ובכללי המספרים הראשוניים.

פעם הוא ראה על הלוח בעיה באנליזה פונקציונאלית (ענף מתמטי), תחום שארדש לא ידע עליו מאומה. הוא קרא את המשפט המתמטי הקשור בבעיה זו, שאל מספר שאלות על הסימונים המתמטיים שבבעיה, ואז ללא כל מאמץ כתב פתרון בן שתי שורות. על הבעיה הזו עבדו קודם לכן שני אנליסטים וחיברו לה פתרון שאורכו 30 עמודים(!). הוא כתב לבדו, או עם שותפים למעלה מ־$1,500$ מאמרים. כפותר חידות מעולה (ולא כמחבר תיאוריות), הוא זכה במספר גדול של פרסים, ביניהם מהנחשבים ביותר כמו פרס קול וולף (המוענק בישראל). כשבעיה הטרידה אותו הוא היה מוכן להציע עבורה הרבה כסף למי שיראה לו את פתרונה. ארדש היה כל כך מוערך מבחינה מקצועית אצל המתמטיקאים, עד כי התפתח ביניהם דירוג של מי שהשתתף איתו בכתיבת מאמר. מי שכתב איתו מאמר קיבל דירוג של 'ארדש ראשון'. מי שפרסם מאמר עם מישהו שפרסם מאמר עם ארדש קיבל את הדירוג 'ארדש 2'. כ־$4,500$ מתמטיקאים הם בעלי דירוג 'ארדש 2', ביניהם אלברט איינשטיין. הדירוג מגיע היום עד 'ארדש 7'. למי שמעולם לא פירסם מאמר מתמטי כלשהו יש 'ארדש ∞'.

הפרדוקס של ברטנרד (*Joseph Louis Francois Bertrand* $1749-1827$)

ב־1812 פרסם המתמטיקאי הצרפתי **לפלס** (*Pierre Simon de Laplace* $1749-1827$) את ספרו החשוב 'התאוריה האנליטית של ההסתברות', בו הוא מגדיר הסתברות של מאורע: תהי Ω - קבוצת כל האפשרויות של תוצאת ניסוי, ותהי A תת־קבוצה של Ω. אזי, $P(A)$ היא מנת החילוק של מספר איברי A במספר איברי Ω: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

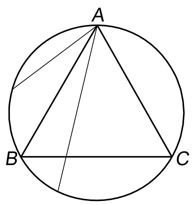
כל זאת בתנאי שהתוצאות הינן שוות־הסתברות, מה שמצמצם את ההגדרה לקבוצות בנות מניה סופיות.

בנות מניה: שניתן למנות אותם, כמו המספרים השלמים, בניגוד למספרים ממשיים, למשל.

ברטנרד פרסם את הפרדוקס המתואר כאן, כדי להצביע על הבעייתיות בהגדרה של **לפלס**:

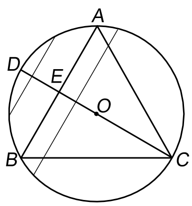
נתון מעגל החוסם משולש שווה צלעות. מעבירים מיתר מקרי במעגל.

מהי ההסתברות שאורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש?



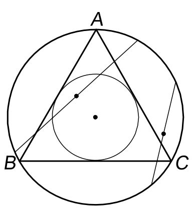
<u>פתרון 1:</u> נציב את אחד מקודקודי המשולש על אחת מנקודות הקצה של המיתר. אם נקודת הקצה השניה של המיתר נמצאת על הקשת $\overset{\frown}{BC}$ - הרי שאורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש. אחרת - הוא קצר ממנה.

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC} \Rightarrow P=\frac{1}{3}$.



<u>פתרון 2:</u> נציב את המשולש, כך שהמיתר יהיה מאונך לאחד מגבהי המשולש, או להמשכו, כמתואר בציור. $OE=\frac{1}{2}R$ (הוכח כתרגיל). אם חיתוך המיתר עם הגובה הוא בקטע OE - הוא ארוך מצלע המשולש, אחרת (אם החיתוך הוא בקטע DE) - אורכו קצר מאורך צלע המשולש.

$OE=ED=\frac{1}{2}R \Rightarrow P=\frac{1}{2}$.



<u>פתרון 3:</u> נתבונן במעגל החסום במשולש הנתון. שטח המעגל החוסם גדול פי ארבעה משטח המעגל החסום במשולש (הוכח כתרגיל). מיתר במעגל נקבע באופן יחיד ע"י נקודת האמצע שלו. אם אמצע המיתר בתוך המעגל החסום - אורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש, אחרת - אורכו קצר מאורך צלע המשולש.

$\Rightarrow P=\frac{1}{4}$.

איך זה יכול להיות? ובכן, כל הפתרונות נכונים. אלא מאי? מרחב המדגם 'כל המיתרים' שאליו התייחסנו באופן טבעי, אינו 'מוגדר היטב' (כלומר, הקביעה שהמיתר נבחר באופן מקרי אינה מגדירה די הצורך את הסיכוי לבחירה), והראָיָה שהוא אינו 'מוגדר היטב' היא הפרדוקס המתואר. הסבר מלא של מרחבי מדגם רציפים ומידות ההסתברות שניתן להגדיר עליהם נמצאים מעבר לרמה התיכונית. בכל זאת, נצביע על כיוון ההסבר: בשלושת הפתרונות הוגדרו מרחבי מדגם שונים עם התפלגות אחידה, המביאים לתוצאות שונות בחישוב הסתברות המאורע:

מרחב המדגם בפתרון הראשון הוא כל זוגות הנקודות על היקף המעגל.

מרחב המדגם בפתרון השני הוא כל הנקודות על הקוטר.

מרחב המדגם בפתרון השלישי הוא כל הנקודות בתוך העיגול של המעגל החוסם.

ניתן להוכיח (וזה החלק הקשה) שמאורעות שווי־הסתברות בפתרון אחד, אינם שווי־הסתברות בפתרון אחר. מכאן שאין לצפות לקבל אותה תשובה.

אילו המרחב היה אינסופי בדיד (כמו המספרים הטבעיים), אזי קרוב לודאי שלא היה נוצר פרדוקס מעין זה. כאן מדובר במרחבי מדגם רציפים (כמו המספרים הממשיים).

לא הבנתם? לא נורא. ה'פרדוקס' (שלמעשה אינו כזה), בכל מקרה, יותר יפה מהפתרון שלו.

בסיכומו של דבר, הקשיים הלוגיים בתורת ההסתברות של **לפלס** הוכחו כמינוריים. יחד עם זאת, הנסיון להתגבר עליהם הוביל לאקסיומטיזציה (מלשון 'אקסיומה') של תורת ההסתברות ב־1933 על ידי המתמטיקאי הרוסי **אנדריי ניקולאיביץ' קולומוגורוב** ($1903-1987$).

(לזכרו של **פרופסור בנו ארבל** ז"ל. נפטר בכ"ז בניסן תשע"ג. יהי זכרו ברוך.)

סיווג שאלות המבחנים

סוגריים מרובעים – מספר עמוד. כל שאר המספרים – מספרי שאלות.

גאומטריה אוקלידית, חלק א'- ללא פרופורציה וללא מעגל [1]

משולשים

- חפיפת משולשים
2, 3, 5, 9, 10
- משפט חפיפה רביעי
5
- משולש ישר-זווית
9
- משולש 30^0 - 60^0 - 90^0
1, 8, 11
- משפט פיתגורס
1
- משולש שווה-שוקיים
5, 6, 11, 13
- משולש שווה-צלעות
1, 2, 11, 12

נקודות וקטעים מיוחדים במשולש

- תיכון
11
- תיכון ליתר במשולש ישר-זווית
6, 7, 8, 11
- קטע אמצעים במשולש
4, 5, 6, 7
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
7

מרובעים

- מקבילית
7, 11, 13
- מלבן
5
- מעוין
1
- ריבוע
1, 3, 9, 10
- טרפז
4, 8
- טרפז ישר-זווית
12
- טרפז שווה-שוקיים
13
- קטע אמצעים בטרפז
4, 8, 12, 13

הבעה באמצעות פרמטר

9, 12

גאומטריה אוקלידית, חלק ב'- פרופורציה ודמיון ללא מעגל [16]

משולשים

- חפיפת משולשים
7, 8, 17, 21, 26, 27
- משולש ישר-זווית
25
- משולש 30^0 - 60^0 - 90^0
21
- משפט פיתגורס
2, 4, 7, 17, 22, 25
- משולש שווה-שוקיים
10, 11, 22, 30
- משולש שווה-צלעות
30

נקודות וקטעים מיוחדים במשולש

- תיכון
6, 11, 30
- תיכון ליתר במשולש ישר-זווית
30
- אנך אמצעי
13
- קטע אמצעים במשולש
6, 13, 16, 30
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
4, 5, 22

מרובעים

- דלתון
21
- מקבילית
6, 12, 18, 26
- מלבן
9, 22
- ריבוע
2, 7, 8
- טרפז
1, 3, 15, 23, 32
- טרפז ישר-זווית
9, 23
- טרפז שווה-שוקיים
4, 19, 21, 27

שטחים

1, 6, 12, 14, 18, 23

פרופורציה

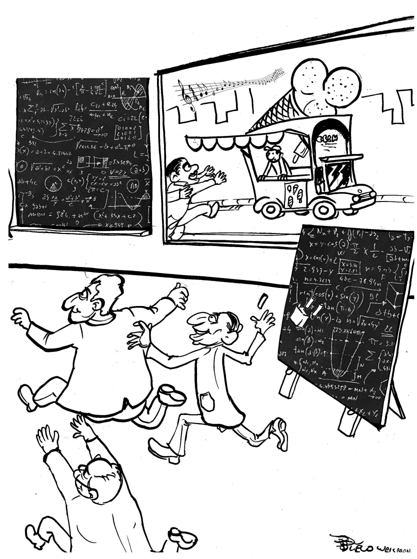
- משפט תאלס
1, 10
הפוך
3, 19, 21, 27, 28
הרחבה ראשונה
1, 6, 13, 14, 16, 24, 28, 29
הרחבה שנייה
3, 8, 9, 14, 15, 16, 23, 28, 29, 30
- משפט חוצה-זווית במשולש
4, 9, 10, 19, 25

דמיון

- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
2, 3, 5, 17
- משפט דמיון זווית-זווית
7, 11, 12, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29
- יחס בין שטחי משולשים דומים
5, 6, 9, 20
- יחס היקפים במשולשים דומים
11, 30

הבעה באמצעות פרמטר

4, 6, 20



גאומטריה אוקלידית, חלק ג'- מעגל ללא פרופורציה ודמיון [49]

משולשים
- חפיפת משולשים
2, 6, 10, 15, 20, 22, 23, 24, 28
- משפט חפיפה רביעי
3, 31
- משולש ישר-זווית
1
- משולש שווה-שוקיים
7, 8, 16, 24, 29
- משולש $30^0 - 60^0 - 90^0$
7, 18, 25, 31
- משפט פיתגורס
4, 21, 23, 30
- משולש שווה-צלעות
6, 7, 12, 19, 30, 31

נקודות וקטעים מיוחדים במשולש
- תיכון
14, 32
- תיכון ליתר במשולש ישר-זווית
5, 14
- אנך אמצעי
18
- קטע אמצעים במשולש
1, 5
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
24, 29
- נקודת מפגש האנכים האמצעיים במשולש
21

מרובעים
- דלתון
8, 20, 22, 31, 32
- מקבילית
3, 13, 19, 25, 26, 27, 31
- מלבן
32
- מעוין
16, 17, 18, 21, 31
- ריבוע
11
- טרפז
30
- טרפז ישר-זווית
28
- טרפז שווה-שוקיים
15
- קטע אמצעים בטרפז
15, 28

שטחים
11, 21, 27, 29, 30, 32

מעגל
- משיק למעגל
2, 4, 9, 11, 17, 25, 27, 28, 31, 32
- קשתות
7, 12, 16, 17, 22
- שני מעגלים
2, 3, 4, 9, 14, 27
- קטע מרכזים
14

מעגל חוסם משולש
18, 21, 23
- שווה-צלעות
12, 13, 26

מעגל חוסם מרובע
4, 6, 12, 16, 19, 22, 24, 27, 29
- טרפז שווה-שוקיים
20

מעגל חסום במרובע
- דלתון
20

רדיוס מעגל
4, 5, 7, 11, 31

רדיוס מעגל חוסם משולש
- שווה-שוקיים
18

הבעה באמצעות פרמטר
13, 14, 32

גאומטריה אוקלידית, חלק ד' 1- פרופורציה ודמיון עם מעגל - משפט תאלס, משפט חוצה זווית, ומשפטי דמיון [84]

משולשים
- חפיפת משולשים
5, 27, 28
- משולש $30^0 - 60^0 - 90^0$
9, 24
- משפט פיתגורס
3, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 20*, 21, 34, 35, 36
- משולש שווה-שוקיים
4, 10, 26
- משולש שווה-צלעות
5, 32

נקודות וקטעים מיוחדים במשולש
- תיכון
27
- אנך אמצעי
29
- נקודת מפגש הגבהים במשולש
15
- קטע אמצעים במשולש
4
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
32

מרובעים
- דלתון
28
- מקבילית
22, 27
- מלבן
12
- מעוין
31, 29, 31
- ריבוע
3
- טרפז שווה-שוקיים
26, 33

שטחים
13, 17, 21, 27, 28, 34

מעגל
- משיק למעגל
2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 35
- קשתות
1, 6, 16, 31
- נקודת מפגש אנכים אמצעיים במשולש כמרכז מעגל חוסם
29
- שני מעגלים
36

מעגל חוסם משולש
1, 4, 7, 8, 10, 11, 29, 35
- צלעות
2, 10

מעגל חסום במשולש
- חצי מעגל חסום במשולש ישר-זווית
3

על פי הקבלה - ניתן לדעת את שם הקופאית.

מעגל חוסם מרובע
14, 15, 20*, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 32
- דלתון
21
- טרפז שווה-שוקיים
9, 20

מעגל חסום במרובע
- טרפז שווה-שוקיים
30
- שני מעגלים
13, 19, 26, 33, 34
- קטע מרכזים
33

רדיוס מעגל
26, 33, 34, 36

רדיוס מעגל חוסם משולש
29

רדיוס מעגל חסום במשולש
- ישר-זווית
3

רדיוס מעגל חוסם מרובע
32
- טרפז שווה-שוקיים
20

רדיוס מעגל חסום במרובע
- טרפז שווה-שוקיים
30

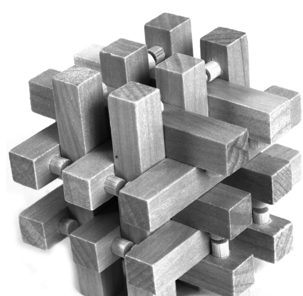
פרופורציה
- משפט תאלס
הפוך
26
הרחבה ראשונה
20*, 25, 27, 32
הרחבה שנייה
21
- משפט חוצה-זווית במשולש
1, 2, 10

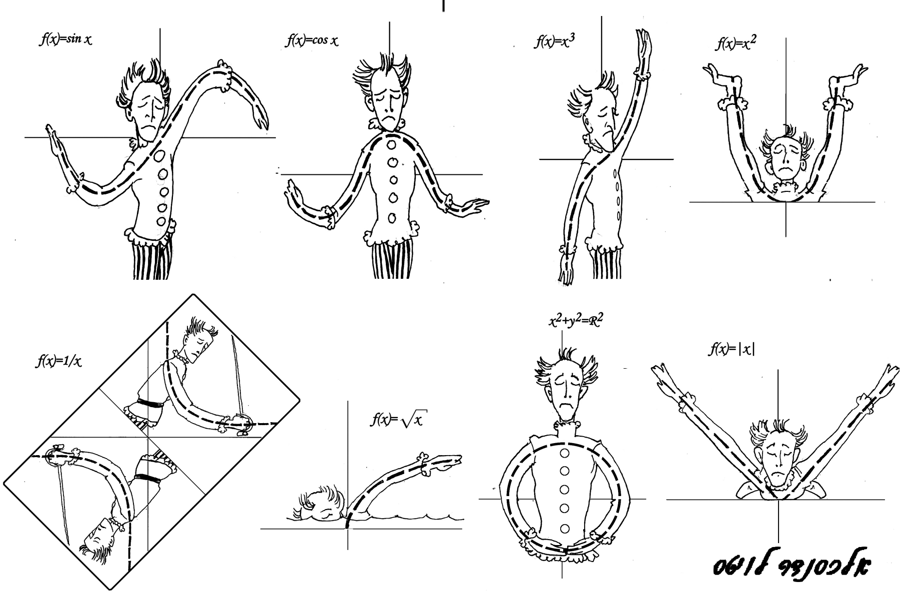
דמיון
- משפט דמיון זווית-זווית
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 35, 36
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
15, 25, 31
- יחס בין שטחי משולשים דומים
8, 13, 22, 24, 25, 35

הבעה באמצעות פרמטר
8, 9, 16, 21, 25, 26, 27, 30

גאומטריה אוקלידית, חלק ד' 2-
משפטי הפרופורציה במעגל [128]

- שלושת משפטי פרופורציה במעגל
שני מיתרים נחתכים
1
שני חותכים
4
חותך ומשיק
2, 3, 5
- שטחים
4
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
5
- משפט חוצה-זווית
1
- יחס בין שטחי משולשים דומים
5
- משיק למעגל
2, 3
- קשתות
1
- מעגל חוסם מרובע
5
- מעגל חוסם טרפז שווה-שוקיים
2
- שני מעגלים
4, 5
- רדיוס מעגל
3





הגדרות, תכונות ומשפטים גאומטריים לפתרון השאלות בגאומטריה אוקלידית חלק א' - ללא פרופורציה וללא מעגל [1]

זוויות
- סכום זוויות צמודות הוא 180^0 — 2, 8, 9
- זוויות קדקודיות שוות זו לזו — 1

קווים מקבילים
- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים — 8, 13
- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל זוג זוויות מתחלפות שוות זו לזו — 8
  - סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0 — 4, 8

משולשים
- סכום הזוויות במשולש הוא 180^0 — 1, 2, 4, 9

משולש שווה-שוקיים
- במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו — 2, 13
- אם במשולש שתי זוויות שוות, אז המשולש הוא שווה-שוקיים — 1
- אם במשולש גובה מתלכד עם התיכון לאותה צלע, אז המשולש הוא שווה שוקיים — 6
- אם במשולש תיכון מתלכד עם חוצה הזווית, אז המשולש הוא שווה שוקיים — 8

במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס - מתלכדים. לפיכך:
- תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם גובה לבסיס — 8
- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס — 1, 4, 6

משולש ישר-זווית
- במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר — 3, 6, 7, 11, 13
- במשולש ישר-זווית, הניצב מול זווית 30^0 שווה למחצית היתר — 1, 8, 12
- במשולש ישר-זווית, הזווית מול הניצב ששווה למחצית היתר היא 30^0 — 11
- במשולש ישר-זווית, היתר גדול מכל אחד מניצביו — 5

משפט פיתגורס
- במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר — 1

משולש שווה-צלעות
- במשולש שווה-צלעות, כל הזוויות שוות בגודלן (60^0) — 1, 2, 12

משפטי חפיפה
- משפט חפיפה ראשון: צלע-זווית-צלע — 2
- משפט חפיפה שני: זווית-צלע-זווית — 3, 9, 10
- משפט חפיפה רביעי: צלע-צלע-זווית — 5
- צמב"ח (צלעות מתאימות במשולשים חופפים) — 5, 9
- זמב"ח (זוויות מתאימות במשולשים חופפים) — 2

מרובעים
מקבילית
- במקבילית, כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו — 12
- במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו — 1, 11
- במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו — 11
- במקבילית, האלכסונים חוצים זה את זה — 11
- מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות הוא מקבילית — 7, 11, 12
- מרובע שבו שני הזוגות של צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית — 13
- מרובע שבו שני הזוגות של זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית — 1
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית — 11

מלבן
- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו — 5
- במלבן, כל הזוויות ישרות — 5
- מרובע בו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן — 9

מעוין
- במעוין, האלכסונים מאונכים זה לזה — 11
- מרובע שבו כל ארבע הצלעות שוות הוא מעוין — 1
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין — 11

ריבוע
- בריבוע, כל הצלעות שוות זו לזו — 1, 9
- בריבוע, כל הזוויות ישרות — 1
- בריבוע, האלכסונים שווים זה לזה, חוצים זה את זה ואת זוויותיו — 3, 10
- בריבוע, האלכסונים מאונכים זה לזה — 3

טרפז
- מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות, הוא טרפז — 9, 13

טרפז שווה-שוקיים
- בטרפז שווה שוקיים, הזוויות שליד כל בסיס שוות זו לזו — 13

קטעים מיוחדים במשולש ובטרפז
נקודת מפגש התיכונים במשולש
- במשולש, נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 1:2, כך שהחלק הקרוב לקדקוד גדול פי 2 מהחלק האחר — 7

קטע אמצעים במשולש
- קטע אמצעים במשולש מחבר אמצעי שתי צלעות — 5
- קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השלישית, חוצה גם את הצלע השנייה (ולכן הוא קטע אמצעים במשולש) — 4, 13
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה — 5, 6, 7

קטע אמצעים בטרפז
- קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה גם את השוק השנייה (ולכן הוא קטע אמצעים בטרפז) — 4, 8
- קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסיו — 4, 12, 13
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסיו — 13

לקראת סוף 1944 דרשה ה'הגנה' מאצ"ל להפסיק מיידית את המרד בבריטים. הלחצים מצד ה'הגנה' גברו מפגישה לפגישה, עד הפגישה האחרונה שבה הוגש האולטימטום האחרון על ידי משה דיין: "אם לא תפסיקו מחר בבוקר – נפגע בכם". שלמה לב־עמי, איש האצ"ל, וחבריו לפגישה ענו לדיין: "בשום אופן לא נפסיק להילחם. בוז לכם. ההסטוריה תשפוט אתכם". על כך ענה משה דיין: "אין לנו ממה לחשוש. אנחנו נכתוב את ההסטוריה".

הגדרות, תכונות ומשפטים גאומטריים לפתרון השאלות בגאומטריה אוקלידית חלק ב' - פרופורציה ודמיון ללא מעגל [16]

זוויות

- סכום זוויות צמודות הוא 180^0

8, 22, 29

- זוויות קדקודיות שוות זו לזו

3, 7, 12, 17, 21

קווים מקבילים

- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל זוג זוויות מתאימות שוות זו לזו

10, 13, 20, 22, 26, 27

  - כל זוג זוויות מתחלפות שוות זו לזו

10, 12, 17, 18, 19, 24, 26, 28, 29

  - סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0

19, 29

משולשים

- סכום הזוויות במשולש הוא 180^0

2, 8, 11, 13, 22, 23

- במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

30

משולש שווה-שוקיים

- במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו

4, 11, 21, 26, 30

- אם במשולש שתי זוויות שוות, אז המשולש הוא שווה-שוקיים

10, 17, 21, 26, 27

- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס

22

משולש ישר-זווית

- במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר

30

משפט פיתגורס

- במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר

2, 4, 7, 17, 22, 25

משולש שווה-צלעות

- במשולש שווה-צלעות, כל הזוויות שוות בגודלן (60^0)

4, 30

- גובה במשולש שווה-צלעות הוא גם תיכון

4, 30

משפטי חפיפה

- משפט חפיפה ראשון: צלע-זווית-צלע

7, 8, 17, 26, 27

- משפט חפיפה שני: זווית-צלע-זווית

21

- צמב"ח (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)

17, 21, 27

- זמב"ח (זוויות מתאימות במשולשים חופפים)

7, 8, 27

מרובעים

דלתון

- בדלתון, הזוויות שעל האלכסון המשני שוות זו לזו

21

מקבילית

- במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו

1, 4, 12, 18, 20

- במקבילית, כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו

26

- מרובע שבו שני הזוגות של צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית

1, 4, 20

מלבן

- במלבן, כל הזוויות ישרות

22

- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו

9

- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות מקבילות

9, 22

ריבוע

- בריבוע, כל הצלעות שוות זו לזו

7, 8

- בריבוע, כל שתי צלעות נגדיות מקבילות

8

- בריבוע, כל הזוויות ישרות

2, 7, 8

טרפז

- בטרפז, הבסיסים מקבילים זה לזה

3, 9

- בטרפז, סכום הזוויות ליד כל שוק הוא 180^0

4

טרפז שווה-שוקיים

- בטרפז שווה שוקיים, הזוויות שליד כל בסיס שוות זו לזו

19, 27

- מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות, והצלעות בזוג השני (השוקיים) שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים

21

קטעים מיוחדים במשולש ובטרפז

נקודת מפגש התיכונים במשולש

- במשולש, נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 1:2, כך שהחלק הקרוב לקדקוד גדול פי 2 מהחלק האחר

4, 5, 22

קטע אמצעים במשולש

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה

6, 13, 16, 30

שטחים

- תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח

6

- שני משולשים בעלי בסיס שווה וגובה שווה - שווים בשטחם

5, 6, 12, 14, 18, 20, 23

פרופורציה

- משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים

1, 10

- משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים

3, 21, 27, 28

- משפט תאלס - הרחבה ראשונה

1, 14, 16, 24, 28, 29

- משפט תאלס - הרחבה שנייה

3, 8, 9, 15, 16, 23, 28, 29, 30

משפט חוצה-זווית פנימית במשולש

- חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה

4, 9, 10, 19, 25

דמיון

משפטי דמיון

- משפט דמיון ראשון: צלע-זווית-צלע

2, 3, 5, 6, 17

- משפט דמיון שני: זווית-זווית

7, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29

- יחס הדמיון

9, 12, 13, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29

- זוויות מתאימות במשולשים דומים שוות זו לזו

17

- היחס בין היקפי משולשים דומים שווה ליחס הדמיון

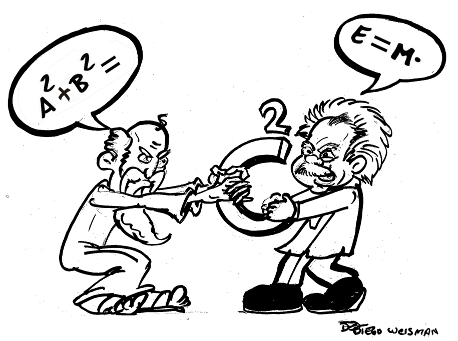
11

- היחס בין השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

5, 6, 9, 20

שאלות עם בניית-עזר

1, 4



מִרְשָׁם להכנת יין: נכנס סוד - יצא יין . . .

הגדרות, תכונות ומשפטים גאומטריים לפתרון השאלות בגאומטריה אוקלידית חלק ג' - מעגל ללא פרופורציה ודמיון [49]

זוויות

- סכום זוויות צמודות הוא 180^0

6, 7, 11, 14, 25, 27

- זוויות קדקודיות שוות זו לזו

16, 17, 19

קווים מקבילים

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים

3, 11, 13, 28, 32

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים

19, 27

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0, אז שני הישרים מקבילים

14, 15, 20, 26, 27

- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל זוג זוויות מתאימות שוות זו לזו

17, 30

  - כל זוג זוויות מתחלפות שוות זו לזו

11, 12, 13, 25, 26, 28, 30, 31

  - סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0

26

משולשים

- סכום הזוויות במשולש הוא 180^0

6, 7, 10, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 28, 29, 30

- זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה

27, 30

- במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

30, 31

- במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות

30

- סכום אורכי שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית

14

משולש שווה-שוקיים

- במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו

7, 9, 11, 14, 16, 19, 20, 21, 25, 28, 29

- אם במשולש שתי זוויות שוות, אז המשולש הוא שווה-שוקיים

2, 7, 8, 16, 17, 22

- תיכונים לשוקיים במשולש שווה-שוקיים שווים זה לזה

29

- אם במשולש חוצה זווית מתלכד עם הגובה לצלע מול הזווית, אז המשולש הוא שווה שוקיים

16

- אם במשולש גובה מתלכד עם התיכון לאותה צלע, אז המשולש הוא שווה שוקיים

1, 19, 24

במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס - מתלכדים. לפיכך:

- חוצה-זווית הראש במשולש שווה שוקיים, הוא גם גובה לבסיס

8, 10, 17

- חוצה-זווית הראש במשולש שווה שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס

17

- תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם גובה לבסיס

15, 24, 29

- תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם חוצה זווית הראש

24

- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס

17, 23, 25

- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם חוצה זווית הראש

19

משולש ישר-זווית

- במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר

5, 14, 29

- במשולש ישר-זווית, הזווית מול הניצב ששווה למחצית היתר היא 30^0

18, 25

- במשולש ישר-זווית, הניצב מול זווית 30^0 שווה למחצית היתר

7, 25, 31

משפט פיתגורס

- במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר

4, 21, 23, 29, 30

משולש שווה-צלעות

- במשולש שווה-צלעות, כל הזוויות שוות בגודלן (60^0)

6, 7, 12, 13, 26, 30, 31

- משולש בו שתי זוויות שוות 60^0, הוא משולש שווה-צלעות

12, 13, 26

משפטי חפיפה

- משפט חפיפה ראשון: צלע-זווית-צלע

6, 15, 20, 22, 24

- משפט חפיפה שני: זווית-צלע-זווית

10, 23, 28

- משפט חפיפה רביעי: צלע-צלע-זווית

2, 3, 31

- צמב"ח (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)

3, 6, 10, 15, 20, 22, 23, 28, 31

- זמב"ח (זוויות מתאימות במשולשים חופפים)

6, 20, 24

מרובעים

דלתון

- מרובע המורכב משני משולשים שווי-שוקיים בעלי בסיס משותף הוא דלתון

8, 20, 22, 31, 32

- בדלתון, האלכסון הראשי חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני, ומאונך לו

31, 32

מקבילית

- במקבילית, כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו

19

- במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו

14, 26

- מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות הוא מקבילית

3, 14, 16, 17, 31

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית

13, 26, 27

- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית

17, 18

מלבן

- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו

32

- מרובע ששלוש מזוויותיו ישרות הוא מלבן

11

מעוין

- במעוין, כל הצלעות שוות זו לזו

18

- במעוין, האלכסונים מאונכים, חוצים זה את זה וחוצים את זוויותיו

21

- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין

16, 17, 31

- מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין

17, 18

ריבוע

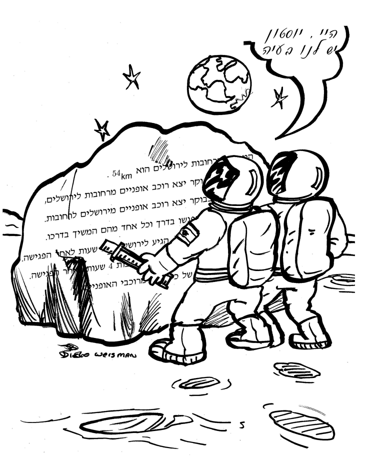
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע

11

טרפז שווה-שוקיים

- בטרפז שווה שוקיים, הזוויות שליד כל בסיס שוות זו לזו

15



קטעים מיוחדים במשולש ובטרפז

נקודת מפגש התיכונים במשולש

- במשולש, נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 1:2, כך שהחלק הקרוב לקדקוד גדול פי 2 מהחלק האחר
24, 29

קטע אמצעים במשולש

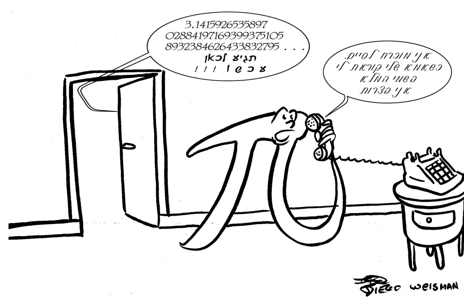
- קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש
1, 5
- קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השלישית, חוצה גם את הצלע השנייה (ולכן הוא קטע אמצעים במשולש)
19
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה
1, 29

קטע אמצעים בטרפז

- קטע המחבר את אמצעי שתי השוקיים בטרפז הוא קטע אמצעים בטרפז
28
- קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה גם את השוק השנייה (ולכן הוא קטע אמצעים בטרפז)
15
- קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסיו
28

שטחים

- תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח
32



מעגל

זוויות, מיתרים וקשתות

- הקוטר הוא המיתר הגדול ביותר במעגל
2
- קטע ממרכז המעגל המאונך למיתר, חוצה את המיתר
5, 10, 18
- קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר, מאונך לו
5
- לקשתות שוות יש מיתרים שווים
16, 17, 22
- למיתרים שווים יש קשתות שוות
22
- גודל קשת במעגל הוא גודל הזווית המרכזית הנשענת עליה
22
- זווית הקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת
7, 8, 22, 29
- זוויות הקפיות הנשענות על אותו מיתר שוות זו לזו
4, 6
- זוויות מרכזיות הנשענות על מיתרים שווים, שוות זו לזו
8, 17
- זוויות הקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו
12, 22, 23, 26, 30
- זוויות הקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים
9, 13, 23, 26, 28, 31
- זוויות הקפיות הנשענות על מיתרים שווים, שוות זו לזו
13
- זוויות הקפיות הנשענות על קשתות שוות, שוות זו לזו
16, 22
- זווית הקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90^0)
1, 3, 16, 17, 18, 31, 32
- זווית הקפית בת 90^0 נשענת על קוטר
1, 2, 4
- מיתרים הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל שווים זה לזה
10

משיק למעגל

- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה
4, 11, 15, 25, 28
- זווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני
2, 9, 27, 28, 31
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה
9, 20, 25, 32
- נקודת ההשקה של שני מעגלים נמצאת על קטע המרכזים שלהם
14

מעגל חוסם משולש

- מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים של צלעות המשולש
21

מעגל חוסם מרובע

- ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180^0
4, 6, 7, 8, 12, 19, 20, 24, 26, 27

שאלות עם בניית-עזר

3, 9, 13, 21, 24, 29, 32

"אתה אדוני השופט חושב שהינך אדם חופשי.
אתה חושב שמכיון שלאחר שיגמר המשפט תלך לביתך,
ואילו אני אהיה המשועבד, כיון שאלך לכלא לזמן רב.
אך דע לך שמבין שנינו, אני הוא בן החורין האמיתי.
אמנם גופי יהיה משועבד, אבל רוחי, היא תישאר חופשית,
כיון שארגיש שלא נכנעתי לגזרותיכם ונשארתי נאמן לאמונתי.
אך לך השופט קבעו מה לומר.
גופך אמנם משוחרר, אבל אינך חופשי להכריע לפי אמונתך. רוחך משועבדת וזה חמור פי כמה."

*דברי **נתן שרנסקי** (1948 עד מאה ועשרים), יושב ראש הסוכנות היהודית, אסיר ציון, לשופט הרוסי שדן בעניינו.*
נתן שרנסקי הואשם ב־1978 האשמות שוא בבגידה ובריגול.
נדון ל־13 שנות מאסר. השתחרר לאחר 9 שנים בעקבות לחץ בינלאומי.

הגדרות, תכונות ומשפטים גאומטריים לפתרון השאלות בגאומטריה אוקלידית חלק ד' 1 - פרופורציה עם מעגל [84]

זוויות

- סכום זוויות צמודות הוא 180^0
5, 14, 16, 22, 24, 25, 28, 35
- זוויות קדקודיות שוות זו לזו
5, 15, 31, 32

קווים מקבילים

- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים
13, 23, 32, 33
- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים
18
- שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0, אז שני הישרים מקבילים
24, 36
- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל זוג זוויות מתאימות שוות זו לזו
18, 25, 26, 31
  - כל זוג זוויות מתחלפות שוות זו לזו
2, 7, 8, 10, 22, 30
  - סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0
24, 25, 27, 30

משולשים

- סכום הזוויות במשולש הוא 180^0
2, 5, 6, 11, 13, 15, 20*, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35
- זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה
19, 20*, 27
- במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות
2, 22, 25, 28, 31
- במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות
35

משולש שווה-שוקיים

- במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו
2, 4, 5, 16, 20*, 23, 24, 26, 27, 33, 34
- אם במשולש שתי זוויות שוות, אז המשולש הוא שווה-שוקיים
8, 10, 18
- אם במשולש גובה לצלע מתלכד עם חוצה הזווית שמול אותה צלע, אז המשולש הוא שווה שוקיים
32
- אם במשולש חוצה זווית מתלכד עם הגובה לצלע מול הזווית, אז המשולש הוא שווה שוקיים
36

במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס - מתלכדים. לפיכך:
- חוצה-זווית הראש במשולש שווה שוקיים, הוא גובה לבסיס
16, 17
- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס
10, 36
- חוצה זווית הראש במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון
17
- חוצה זווית הראש במשולש שווה-שוקיים, הוא גם גובה
36
- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם חוצה-זווית הראש
24

משולש ישר-זווית

- במשולש ישר-זווית, היתר גדול מכל אחד מניצביו
30
- במשולש ישר-זווית, הזווית מול הניצב ששווה למחצית היתר היא 30^0
9, 24
- במשולש ישר-זווית, הניצב מול זווית 30^0 שווה למחצית היתר
9

משפט פיתגורס

- במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר
3, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 21, 34, 35, 36

משולש שווה-צלעות

- משולש בו שתי זוויות שוות 60^0, הוא משולש שווה-צלעות
5

משפטי חפיפה

- משפט חפיפה שני: זווית-צלע-זווית
5, 28
- משפט חפיפה שלישי: צלע-צלע-צלע
27, 28
- צמב"ח (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)
28
- זמב"ח (זוויות מתאימות במשולשים חופפים)
10, 28

מרובעים

דלתון

- בדלתון, האלכסון הראשי חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני, ומאונך לו
28

מקבילית

- במקבילית, כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו
27
- במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו
27
- מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות הוא מקבילית
31
- מרובע שבו שני הזוגות של צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית
27

מלבן

- במלבן, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו
12
- במלבן, כל הזוויות ישרות
12
- מרובע ששלוש מזוויותיו ישרות הוא מלבן
3

מעוין

- במעוין, האלכסונים חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה
29
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין
31

ריבוע

- בריבוע, הצלעות הנגדיות מקבילות
3
- מלבן בו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע
3

קטע אמצעים בטרפז

- קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסיו
30

שטחים

- שני משולשים בעלי בסיס שווה וגובה שווה - שווים בשטחם
22
- תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח
27, 34

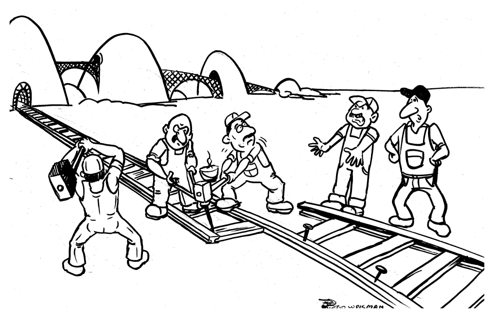
$$\text{מבחן} = 100$$

הגימטריה של 'מבחן' היא בדיוק מאה: $40 + 2 + 8 + 50 = 100$!

פרופורציה
משפט תאלס
- משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים
26
- משפט תאלס - הרחבה ראשונה
20*, 25, 27, 32
- משפט תאלס - הרחבה שנייה
21

משפט חוצה-זווית פנימית במשולש
- חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה
1, 10

דמיון
משפטי דמיון
- משפט דמיון ראשון: צלע-זווית-צלע
15, 25, 31
- משפט דמיון שני: זווית-זווית
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 35, 36
- יחס הדמיון
2, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 26, 28, 29, 30, 36
- זוויות מתאימות במשולשים דומים שוות זו לזו
31
- היחס בין השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
8, 13, 22, 24, 25, 35



מעגל
זוויות, מיתרים וקשתות
- קטע ממרכז המעגל המאונך למיתר, חוצה את המיתר
12, 30
- קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר, מאונך לו
9
- לקשתות שוות יש זוויות מרכזיות שוות
16
- זווית הקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת
6, 14, 24
- זוויות הקפיות הנשענות על אותו מיתר שוות זו לזו
17, 21, 31, 35
- לקשתות שוות יש מיתרים שווים
31
- זוויות הקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו
5, 6, 8, 18, 19
- זוויות הקפיות הנשענות על קשתות שוות, שוות זו לזו
1, 11, 31
- זווית הקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90^0)
9, 11, 12, 14, 20*, 21, 24, 31, 32, 35
- זווית הקפית בת 90^0 נשענת על קוטר
2, 17, 31, 35

משיק למעגל
- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה
3, 12, 20*, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 34, 36
- זווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני
2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 19, 23, 28, 35
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה
20*, 23, 26, 30, 33, 34, 35, 36
- הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשיקים חוצה את הזווית שבין המשיקים
23, 33, 36
- נקודת ההשקה של שני מעגלים במשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו
33, 36

מעגל חוסם משולש
- מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים של צלעות המשולש
29

מעגל חוסם מרובע
- ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180^0
14, 15, 20*, 22, 24, 25, 27, 28, 32

מעגל חסום במרובע
- מרובע חוסם מעגל אם ורק אם סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני
30

שאלות עם בניית-עזר
27, 28

בוחן פתע

המורה הודיע כי בשבוע הבא יתקיים בוחן פתע. מסתבר שהדבר אינו אפשרי.

ביום ו' לא ניתן לקיים את הבוחן, כי אם עד יום ה' לא התקיים בוחן, אז ברור שהוא יתקיים ביום ו', אבל אז – זה כבר לא יהיה 'פתע'. ביום ו', אם־כן, לא ניתן לקיים את הבוחן.

אם עד יום ד' לא התקיים בוחן הרי שברור שהוא יתקיים ביום ה', שהרי יום ו' זה בלתי אפשרי, כאמור, אבל אז, שוב – זה כבר לא יהיה 'פתע' . . . בימים ה' ו־ו', אם־כן, לא ניתן לקיים את הבוחן.

הלאה: אם עד יום ג' לא נערך בוחן הפתע, ברור כי הוא יתקיים ביום ד', שהרי בימים ה' ו־ו' לא ניתן לקיים את הבוחן. אלא ששוב: אם כך, יום ד' הוא כבר לא 'פתע' . . .

וכך הלאה, וכך הלאה: מתברר, אם כן, שלא ניתן לערוך את הבוחן באף לא יום אחד מימות השבוע . . .

(הבוחן התקיים, בסופו של דבר, ביום שלישי, להפתעת כל התלמידים . . .)

הגדרות, תכונות ומשפטים גאומטריים
לפתרון השאלות בגאומטריה אוקלידית
חלק ד' 2 - משפטי הפרופורציה במעגל [128]

זוויות
- סכום זוויות צמודות הוא 180^0 2, 5

קווים מקבילים
- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל זוג זוויות מתחלפות שוות זו לזו 2
  - סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180^0 2

משולש שווה-שוקיים
- אם במשולש גובה מתלכד עם התיכון לאותה צלע, אז המשולש הוא שווה שוקיים 5

משפט פיתגורס
- במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר 1, 4

משפטי חפיפה
- משפט חפיפה שני: זווית-צלע-זווית 2

טרפז שווה-שוקיים
- טרפז בו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים 2
- בטרפז שווה-שוקיים, סכום זוויות נגדיות הוא 180^0 2

דמיון

משפטי דמיון
- משפט דמיון ראשון: צלע-זווית-צלע 5
- היחס בין השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון 5

מעגל

זוויות, מיתרים וקשתות
- קטע ממרכז המעגל המאונך למיתר, חוצה את המיתר 5
- זווית הקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת 2
- כל הזוויות ההקפיות הנשענות על קשתות שוות, שוות זו לזו 1
- זווית הקפית בת 90^0 נשענת על קוטר 1

משיק למעגל
- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה 2, 3
- זווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני 2
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה 3

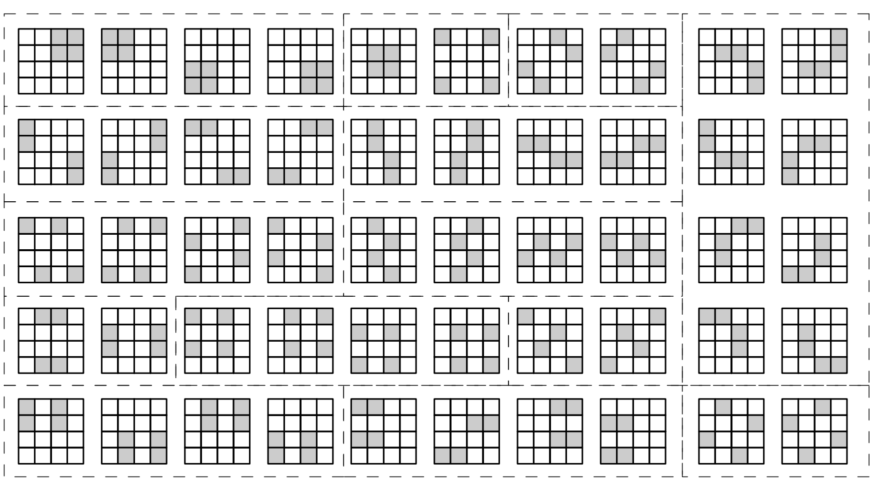
מעגל חוסם מרובע
- ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180^0 5

שלושת משפטי פרופורציה במעגל
- אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני 1
- אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק 2, 3, 5
- אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני 4

אלוף ריבועי הקסם

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

ישנם 880 ריבועי קסם יסודיים מסדר 4×4 ,
כלומר שאף לא אחד מהם הינו שיקוף או סיבוב של ריבוע קסם אחר.
ריבוע הקסם המתואר משמאל הוא כנראה ריבוע הקסם היפה ביותר.
לא רק שסכום כל שורה, כל טור וכל אלכסון שווה ל- 34,
אלא עוד 50 וריאציות סימטריות נוספות, ובסה"כ: 60 צירפים סימטריים של 34 !
להלן פירוט הצירופים (למעט שורות, טורים ואלכסונים):



טריגונומטריה במישור - ללא מעגל [135]

ללא פרמטר
1, 2a, 3

עם פרמטר
2, 4, 5

משולשים
- משולש קהה-זווית
5
- משולש שווה-שוקיים
3, 4
- מפגש התיכונים במשולש
4

מרובעים
- מעוין
2
- טרפז
1

הבעה באמצעות פרמטר
2, 4

הגדרות, תכונות, משפטים גאומטריים, זהויות טריגונומטריות ומשפטי הסינוסים והקוסינוסים לפתרון השאלות בטריגונומטריה

נושא ראשי
ללא פרמטר
1, 2a, 3
עם פרמטר
2, 4, 5

קווים מקבילים
- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו
1

משולשים
- סכום הזוויות במשולש הוא 180^0
1, 2, 4

משולש שווה-שוקיים
- במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שווה זו לזו
3, 4

במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס - מתלכדים. לפיכך:
- גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים, הוא גם תיכון לבסיס
3

משפטי חפיפה
- משפט חפיפה ראשון: צלע-זווית-צלע
2

מעוין
- במעוין, כל הצלעות שוות זו לזו
2
- במעוין, האלכסונים חוצים את הזוויות
2
- במעוין, סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180^0
2

שטחים
- שני משולשים בעלי בסיס שווה וגובה שווה - שווים בשטחם
2

דמיון
משפטי דמיון
- משפט דמיון שני: זווית-זווית
3

הבעה באמצעות פרמטר
2, 4

שאלות עם בניית-עזר
3

משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים
משפט הסינוסים בלבד
1
משפט הקוסינוסים בלבד
3
משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים
2, 4

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות רציונאליות [143]

- ללא פרמטר
1, 3, 6, 7, 8
- עם פרמטר
2, 4, 5
- עם שני פרמטרים
1, 3, 6
- פונקציה זוגית/אי-זוגית
6, 8
- אסימפטוטות
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8
- נקודות פיתול
2
- התאמת גרף לפונקציה
5, 6, 8
- הקשר בין הנגזרת לגרף הפונקציה
8
- "חור" בגרף הפונקציה
3
- טרנספורמציה של פונקציה
  ערך מוחלט
3
  ערך מוחלט והזזה אנכית
4
  שיקוף ביחס לציר x
3
  פונקציה הופכית והזזה אופקית
7

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות עם שורש ריבועי [156]

- ללא פרמטר
1, 7
- עם פרמטר
2, 3, 4, 5, 6, 8
- פונקציה זוגית/אי-זוגית
4, 6, 8
- אסימפטוטות
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- הישר y=k
1, 4
- טרנספורמציה של פונקציה
  פונקציה הופכית
6
  הזזה אופקית
3
  העלאה בחזקה ופונקציה הופכית
8

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון [168]

מיון לפי נושא

תנועה
- פונקציית שורש
1

גאומטריה
- פונקציה רציונאלית
3

גרפים
- על סמך גרף הפונקציה
4
- פונקציה פולינומיאלית
8
- פונקציית רציונאלית
2, 6, 7
- פונקציית שורש
5

ידעתי שתהיה מערכת בחירות שלישית מהשנה הראשונה.

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.
57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. (99-101 לחמש יחידות בלבד)

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180^\circ(n-2)$.

נוסחאון הבגרות לחמש יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \;,\; a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \;,\; a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \;,\; a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a \;,\; a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a \;,\; a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \;;\; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b \;,\; a^{\log_a b} = b \;,\; \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \;,\; \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \;,\; \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : ${}_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})] \;,\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0 \;,\; \underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$ היא: $\left(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l} \,,\, \frac{ly_1 + ky_2}{k+l} \right)$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

בנקודה (x_0, y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$

בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,
כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

שעשועי לשון

1. חולצה מטיילת בנחל פרת (דו־משמעי). 2. חולצת חלוצה חולצה בחלוצה.

<u>טריגונומטריה</u>

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$

- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל-c)

- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי</u>

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

  $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

  נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

  נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

  נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו-$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ (t ממשי $t \neq -1$)

  אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

  $\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$