בע"ה מנחם־אב התשע"ט

אוגוסט 2019 למנינם

# מספר מילים לפנֵי

בעקבות תפיחתו של ספר הבגרויות לשאלון זה עד כדי אי־נוחות, חִלקתי אותו לשני חלקים: ספר זה, החלק הראשון, מכיל את רֹב שאלות הבגרות מהשנים 2013–2004 במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון 581 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. חלק קטן מהשאלות נלקחו משנים מוקדמות יותר. שאלות שחסרות כאן ממבחנים אלו נמצאים בחלקו השני של הספר (החל מ־2009. בתקופת החפיפה של שתי מתכונות המבחן (2013–2009), היו שאלות שהופיעו בשתי המתכונות - צבירה והחדשה). הספר הנוסף, החלק השני, מכיל את כל 36 המבחנים במתכונת הנוכחית. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה).

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

**סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.**

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה **שריף אמארה** מכפר זָלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התש"פ - 2020), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחִלַּחְתִּי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקודות **לאומית או יהודיות.**

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

**ב ה צ ל ח ה** אני מיטב

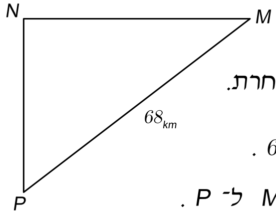
---

**ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 582-482-481-382**

**ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 582-581-482-481**

---

## אלגברה




### בעיות מילוליות - תנועה - שאלות

בכל השאלות - מהירות המתוארים הינה קבועה, אלא אם כן צוין אחרת.

**1.** (4 יח׳ , חורף תשל״ח - 78) המרחק מעיר M לעיר P הוא $68_{km}$ .
M נמצאת מזרחה מ־ N . P - דרומה מ־ N . רוכב אופנוע נסע מ־ M ל־ P .
הואיל והכביש הישיר המחבר את M עם P היה מוצף מים
- נסע הרוכב תחילה מ־ M ל־ N ולאחר מכן מ־ N ל־ P .
נסיעה זו נמשכה ב־ 24 דקות יותר מכפי שהייתה נמשכת הנסיעה ישר מ־ M ל־ P .
את המרחק מ־ M ל־ N עבר רוכב האופנוע בשעה אחת. מצא את המרחק מ־ N ל־ P ואת
המהירות שבה נסע רוכב האופנוע. (היעזר במשפט פיתגורס.) **(7)**

**2.** (4 יח׳ , קיץ תשמ״ב - 82) לספינת נהר מהירות של 5 קמ״ש במים עומדים כשהיא טעונה,
ו־ 15 קמ״ש במים עומדים כשהיא ריקה.
הספינה יוצאת טעונה במעלה הנהר (נגד הזרם) למרחק של $81_{km}$ . היא חוזרת (עם זרם) ריקה.
משך הנסיעה הלוך וחזור, כולל 3 שעות עגינה לפריקת המטען הוא 48 שעות.
מהי מהירות הזרם? **(7)**

**3.** (5 יח׳ , קיץ נ״ד - 94) מונית, הנוסעת במהירות קבועה של 80 קמ״ש, ואוטובוס, הנוסע במהירות
קבועה של v קמ״ש, יוצאים בו־זמנית מנקודה A לנקודה B.
כשהמונית הייתה באמצע הדרך, לאוטובוס נותרו עוד $15_{km}$ כדי להגיע לנקודה B.
כשהאוטובוס היה באמצע הדרך, למונית נותרו עוד $8_{km}$ כדי להגיע לנקודה B.
**א.** חשב את המרחק בין A ל־ B **ב.** חשב את מהירות האוטובוס v **(8)**

**4.** (5 יח׳ , קיץ תשנ״ז - 97) מנמל A יצאה סירת משוטים עם הזרם לנמל B.
שעה אחריה יצאה בעקבותיה מנמל A סירת מנוע, הגיעה לסירת המשוטים וחזרה לנמל A.
סירת המנוע הגיעה לנמל A כאשר סירת המשוטים הגיעה לנמל B.
ידוע כי מהירות סירת המשוטים (במים עומדים) גדולה פי 4 ממהירות הזרם,
ומהירות סירת המנוע (במים עומדים) גדולה פי 5 ממהירות הזרם.
מצא את משך הנסיעה של סירת המשוטים מנמל A לנמל B. **(8)**

---

### תשובות

**1.** $PN = 32_{km}$ , $V = 60_{km/h}$

**2.** $3_{km/h}$

**3. א.** $AB = 24_{km}$ **ב.** $v = 60_{km/h}$

**4.** $13\frac{1}{2}_{hours}$

**5.** (5 יח' , קיץ תשנ"ט - 99)

שני גופים נעים, כל אחד מהם, במהירות קבועה.

כל אחת מהמהירויות חיובית. מהירות הגוף הראשון גדולה ב־$m$ קמ"ש ממהירות הגוף השני.

הגוף הראשון עובר $160_{km}$ ב־ 5 שעות יותר מהזמן שדרוש לגוף השני לעבור $90_{km}$ .

עבור איזה ערך של $m$ יש לגוף השני מהירות אחת בלבד, שמקיימת את כל תנאי הבעיה? **(9)**

**6.** (5 יח' , קיץ תשס"א - 2001 - מועד ב)

משני מקומות $A$ ו־$B$ יצאו בו־זמנית שני הולכי רגל

זה לקראת זה. הם נפגשו בנקודה $C$. הדרך $AC$ ארוכה ב־ $12_{km}$ מהדרך $BC$.

הולכי הרגל המשיכו ללכת בכיוון שהלכו לפני פגישתם.

הולך הרגל מ־$A$ הגיע ל־$B$ - 4 שעות לאחר פגישתם,

והולך הרגל מ־$B$ הגיע ל־$A$ - 9 שעות לאחר פגישתם.

**א.** בטא את הדרכים $AC$ ו־$BC$ באמצעות המהירויות של הולכי הרגל.

**ב.** חשב את המהירות של כל אחד מהולכי הרגל. **(9)**

**7.** (5 יח' , קיץ תשס"ג - 2003)

מסוק ומטוס קל יצאו בו־זמנית זה לקראת זה.

המסוק יצא משדה תעופה $A$, והמטוס יצא משדה תעופה $B$ . עד רגע הפגישה עבר המסוק 100 קמ"ש פחות מהמטוס, והגיע לשדה התעופה $B$ כעבור 3 שעות מרגע הפגישה.

המטוס הגיע לשדה התעופה $A$ כעבור שעה ו־20 דקות מרגע הפגישה.

**א.** מצא את המהירות של המסוק ואת המהירות של המטוס.

**ב.** מצא את המרחק בין שדות התעופה $A$ ו־$B$. **(10)**

**8.** (5 יח' , קיץ תשס"ג - 2003 - מועד ב)

קבוצת מטיילים יצאה מוואדי כדי להגיע למכונית המחכה להם במרחק של $21_{km}$ .

כעבור 4 שעות הליכה, במהירות קבועה, הבינו כי אם ימשיכו ללכת באותה מהירות, יאחרו ברבע שעה. הם הגבירו מיד את מהירות ההליכה ב־2 קמ"ש, והגיעו למכונית 10 דקות לפני הזמן.

באיזו מהירות הלכה הקבוצה לפני שהגבירה את מהירותה? **(10)**

## תשובות

**5.** $m = 2$

**6. א.** $AC = 9y_{km}$ , $BC = 4x_{km}$

**ב.** $x = v_{A\to B} = 6_{km/h}$ , $y = v_{A\leftarrow B} = 4_{km/h}$

**7. א.** $V$ מסוק $= 100_{km/h}$ , $V$ מטוס $= 150_{km}$

**ב.** $AB = 500_{km}$

**8.** $4_{km/h}$

**9.** (006 , קיץ ס״ד - 2004 , מועד א) מעיר A יצאה מכונית א׳ לכיוון עיר B.

6 שעות אחר כך יצאה מעיר B מכונית ב׳ לכיוון עיר A.

שתי המכוניות נפגשו בדרך. עד נקודת המפגש עברה מכונית א׳ 120 ק״מ יותר משעברה מכונית ב׳.

מכונית א׳ הגיעה לעיר B 9 שעות אחרי הפגישה, ומכונית ב׳ הגיעה לעיר A 8 אחרי הפגישה.

מצא את: **א.** המרחק שעברה מכונית ב׳ עד למפגש **ב.** מהירות כל אחת מהמכוניות **(11)**

**10.** (006 , קיץ ס״ד - 2004 , מועד ב) שני הולכי רגל יצאו בו זמנית מעיר א׳ לעיר ב׳.

המרחק בין עיר א׳ לעיר ב׳ הוא 30 ק״מ. הולך הרגל הראשון הלך במהירות הגדולה ב־2 קמ״ש מהמהירות של הולך הרגל השני. כעבור 1.5 שעות הקטין הולך הרגל הראשון את מהירותו לחצי מהמהירות הקודמת, והגיע לעיר ב׳ שעה לאחר הולך הרגל השני.

**א.** מה היתה המהירות של הולך הרגל השני, אם ידוע שהיא קטנה מ־5 קמ״ש.

**ב.** כמה זמן לאחר ששני הולכי הרגל יצאו מעיר א׳, השיג הולך הרגל השני את הולך הרגל הראשון?
**(11)**

**11.** (006 , חורף ס״ה - 2005) המרחק בין A ל־B הוא $42_{km}$. רוכב אופניים א׳ יצא מ־A לכיוון B.

$\frac{1}{2}$ שעה אחריו יצא מ־A רוכב אופניים ב׳ במהירות של $16_{km/h}$.

הרוכבים נפגשו, ומיד לאחר מכן חזר רוכב אופניים ב׳ ל־A.

הוא הגיע ל־A בדיוק כאשר רוכב א׳ הגיע ל־B. מה היתה מהירות רוכב אופניים א׳? **(12)**

**12.** (006 , חורף ס״ו - 2006) שני רוכבי אופניים יצאו בו־זמנית מעיר A לעיר C .

המרחק בין שתי הערים הוא $65_{km}$ .

הרוכבים רכבו בשני מסלולים שונים, באותה מהירות קבועה.

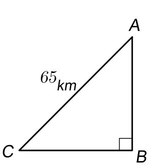
הרוכב הראשון רכב ישירות מעיר A לעיר C.

הרוכב השני רכב תחילה לעיר B, הנמצאת מדרום לעיר A,

ואחר כך לעיר C, הנמצאת ממערב לעיר B.

הרוכב השני הגיע לעיר B שעה אחת לאחר שיצא מעיר A,

והוא הגיע לעיר C 48 דקות אחרי שהרוכב הראשון הגיע אליה.




**א.** מצא את מהירות הרכיבה של רוכבי האופניים.

**ב.** באיזה מרחק מעיר C היה הרוכב השני, כאשר הראשון הגיע אליה? **(12)**

## תשובות

**9. א.** $360_{km}$ **ב.** $V_{B\to A}=60_{km/h}$ , $V_{A\to B}=40_{km/h}$ **11.** $12_{km/h}$

**10. א.** $4_{km/h}$ **ב.** $4.5_h$ **12. א.** $25_{km/h}$ **ב.** $20_{km}$

**13.** (006 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב) בני וגל התחרו בריצה במסלול $AB$ שאורכו $50_m$.
שניהם זינקו מנקודה $A$ ורצו אל נקודה $B$.
בני זינק ראשון. גל זינק שניה אחת אחרי בני והשיג אותו במרחק $10_m$ מנקודת הזינוק $A$.
כאשר גל הגיע ל-$B$, הוא רץ מיד בחזרה ל-$A$, ופגש שוב את בני שהיה עדיין בדרכו ל-$B$.
הפגישה השניה אירעה $10$ שניות לאחר שבני זינק מ-$A$.
באיזה מרחק מנקודה $B$ אירעה הפגישה השניה? **(13)**

**14.** (006 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד) שני הולכי רגל יצאו באותו הזמן מ- $A$ ל- $B$ .
הראשון הגיע ל- $B$ שעתיים וחצי לאחר שעזב את $A$ .
השני, לאחר שעבר $\frac{1}{5}$ מהדרך, חזר ל- $A$ . הוא שהה $10$ דקות ב- $A$ .
לאחר מכן הוא יצא שוב ל- $B$ והגיע ל- $B$ יחד עם הולך הרגל הראשון.
הולך הרגל השני עבר כל ק"מ ב- $5$ דקות פחות מהראשון.
מצא את המהירויות של שני הולכי הרגל. **(14)**

**15.** (006 , חורף ס"ז - 2007) רכבת יצאה מתחנה $A$ ונסעה במהירות קבועה לתחנה $B$.
שעתיים אחרי היציאה הגיעה הרכבת לנקודה $C$, ואז קיבל הנהג הוראה להאט.
מיד אחרי ההוראה המשיכה הרכבת לנסוע במהירות שהיתה $\frac{1}{3}$ מהמהירות הקודמת.
הרכבת הגיעה לתחנה $B$ $40$ דקות אחרי השעה המתוכננת.
למחרת יצאה הרכבת מתחנה $A$ באותה מהירות קבועה, אך הפעם, $14_{km}$ אחרי הנקודה $C$,
קיבל הנהג הוראה להאט.
מיד אחרי ההוראה המשיכה הרכבת לנסוע במהירות שהיתה $\frac{1}{3}$ מהמהירות הקודמת.
הפעם הגיעה הרכבת לתחנה $B$ $20$ דקות אחרי השעה המתוכננת.
**א.** מצא את המרחק בין תחנה $A$ לתחנה $B$.
**ב.** מצא את המהירות שבה נסעה הרכבת עד שהנהג קיבל הוראה להאט. **(14)**

**המתמטיקה - מלכת המדעים ושפחתם**

## תשובות

**13.** $10_m$

**14.** הראשון: $4_{km/h}$ , השני: $6_{km/h}$

**15.** **א.** $196_{km}$ **ב.** $84_{km/h}$

**.16** (006 , קיץ ס"ז - 2007) מכונית צעצוע יצאה מנקודה $A$, ונעה לכיוון נקודה $B$ בקו ישר.

המרחק בין נקודה $A$ לנקודה $B$ הוא $2.5$ מטרים.

כעבור $1.5$ שניות מיציאת המכונית, נזרק כדור מנקודה $B$.

הכדור נע בקו ישר לעבר המכונית במהירות קבועה של $3$ מטרים לשניה.

לאחר שהכדור התנגש במכונית, המשיכה המכונית לנוע בקו ישר לכיוון הנקודה $B$

במהירות הקטנה ב־ $40\%$ ממהירותה עד ההתנגשות.

המכונית הגיעה לנקודה $B$ כעבור $7$ שניות מרגע יציאתה מנקודה $A$.

מה היתה מהירות המכונית עד רגע ההתנגשות? **(15)**

**.17** (006 , קיץ ס"ז - 2007 , מועד ב מיוחד) שני רוכבי אופניים יצאו בו־זמנית משתי ערים שהמרחק

ביניהן $120_{km}$ . הם נסעו זה לקראת זה ונפגשו כעבור שעתיים ו־ $40$ דקות.

ידוע כי רוכב אחד עובר מרחק של קילומטר אחד בשתי דקות פחות מהרוכב השני.

מצא את מהירות הרכיבה של כל רוכב, ואת הדרך שעבר עד הפגישה. **(15)**

**.18** (006 , חורף ס"ט - 2009) המרחק בין תחנת הרכבת $A$ לתחנת הרכבת $B$ הוא $240_{km}$.

תחנה $C$ נמצאת בין $A$ ל־ $B$ , במרחק $90_{km}$ מ־ $A$ .

בשעה $7^{00}$ יוצאת רכבת משא מ־ $A$ ונוסעת ל־ $B$ במהירות קבועה .

בשעה $8^{00}$ יוצאת רכבת נוסעים מ־ $C$ ונוסעת ל־ $B$ במהירות קבועה ,

הגדולה ב־ $20$ קמ"ש מהמהירות של רכבת המשא. **(16)**

**א.** ביום א' הגיעה רכבת הנוסעים לתחנה $B$ לפני שהגיעה לשם רכבת המשא.

היא הקדימה את רכבת המשא <u>ביותר</u> מחצי שעה.

באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות של רכבת המשא ביום א' ?

**ב.** למחרת הגיעה רכבת הנוסעים לתחנה $B$ , בדיוק חצי שעה לפני שהגיעה ל־ $B$ רכבת המשא.

באיזה מרחק מ־ $A$ היתה רכבת המשא, כאשר רכבת הנוסעים הגיעה ל $B$ ?

> 251 **הוא המספר הקטן ביותר הניתן להצגה בשני אופנים שונים כסכום של שלושה מספרים קוביים:**
> $$251 = 1^3 + 5^3 + 5^3 = 2^3 + 3^3 + 6^3$$

## תשובות

**.16** $0.5_{m/sec}$

**.17** $30_{km/h}$ , $80_{km}$

**.18** **א.** $0 < x < 80$ **ב.** $200_{km}$

**19.** (006 , חורף ס"ט - 2009 , מועד מיוחד)

רוכב אופניים יצא בשעה $8^{00}$ מנקודה A לנקודה B .

המרחק מ־ A ל־ B הוא 50 ק"מ.

בשעה $9^{30}$ יצאה מכונית מנקודה B לנקודה A , ונסעה במהירות קבועה של 60 קמ"ש.

לאחר שרוכב האופניים פגש במכונית, הרוכב המשיך בדרכו לכיוון הנקודה B

במהירות השווה ל־ 60% ממהירותו הקודמת.

הרוכב הגיע לנקודה B בשעה $15^{00}$.

באיזו שעה רוכב האופניים פגש במכונית? **(17)**

---

במשושה שבציור רשום מספר ראשוני המורכב מ־ 1027 ספרות. המספר הוא פָּלינדרומי: נקרא מימין לשמאל ומשמאל לימין באופן זהה. גם את התבנית של מספר ראשוני זה גילה **ד"ר מיכאל הרטלי** (Dr. Michael Hartley).

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8 7 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

---

## תשובות

**19.** $10^{00}$

## תנועה - פתרונות

**1.**

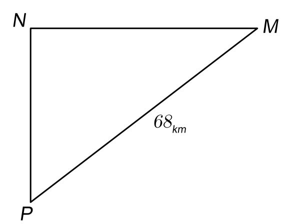
| | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|
| $M \to P$ | $x$ | $\Leftarrow \frac{68}{x} \Rightarrow$ | $68$ |
| $M \to N$ | $x$ | $1 \Leftarrow$ | $MN = x$ |
| $M \to N \to P$ | $x$ | $\frac{68}{x} + \frac{24}{60} \Leftarrow$ | $MNP = 68 + \frac{2x}{5}$ |

$$NP^2 + NM^2 = MP^2 \quad \Rightarrow \quad (68 + \tfrac{2x}{5} - x)^2 + x^2 = 68^2 \quad \Rightarrow \quad (68 - \tfrac{3x}{5})^2 + x^2 = 68^2$$

$$68^2 - \frac{408x}{5} + \frac{9x^2}{25} + x^2 = 68^2 \quad / - 68^2 \quad /\cdot 25 \quad \Rightarrow \quad -2040x + 9x^2 + 25x^2 = 0$$

$$34x^2 - 2040x = 0 \quad \Rightarrow \quad 34x(x-60) = 0 \ , \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 60_{km/h}}$$

$$NP = 68 - \frac{3x}{5} = 68 - \frac{60 \cdot 3}{5} = 68 - 36 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{NP = 32_{km}}$$




---

**2.** $x$ - מהירות זרם הנהר

| | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|
| הלוך | $5 - x$ | $\Leftarrow \frac{81}{5-x} \Rightarrow$ | $81$ |
| חזור | $15 + x$ | $\Leftarrow \frac{81}{15+x} \Rightarrow$ | $81$ |

$$\frac{81}{5-x} + \frac{81}{15+x} + 3 = 48 \quad / - 3 \quad /\cdot \frac{(5-x)(15+x)}{9} \quad \Rightarrow \quad 9(15+x) + 9(5-x) = 5(5-x)(15+x)$$

$$135 + 9x + 45 - 9x = 375 + 25x - 75x - 5x^2 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 50x - 195 = 0 \quad / : 5$$

$$x^2 + 10x - 39 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-10 \pm 16}{2} = -5 \pm 8 \ , \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 3_{km/h}}$$

> "Never in the field of human conflict was so much owed by so many to so few"
>
> ("מעולם בסכסוך אנושי, לא חבו רבים כל כך, הרבה כל כך, למעטים כל כך.")
>
> **וינסטון צ'רצ'יל** , 20.8.1940 , על הטייסים הבריטים בקרב על בריטניה.

**.3** $x = AB$

כשהמונית עבר מחצית הדרך:

| | מהירות | | זמן | | דרך |
|---|---|---|---|---|---|
| מונית | $80$ | $\Leftarrow$ | $\frac{x}{2} : 80 = \frac{x}{160}$ | $\Rightarrow$ | $\frac{x}{2}$ |
| אוטובוס | $v$ | $\Leftarrow$ | $\frac{x-15}{v}$ | $\Rightarrow$ | $x - 15$ |

כשהאוטובוס עבר מחצית הדרך:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| אוטובוס | $v$ | $\Leftarrow$ | $\frac{x}{2} : v = \frac{x}{2v}$ | $\Rightarrow$ | $\frac{x}{2}$ |
| מונית | $80$ | $\Leftarrow$ | $\frac{x-8}{80}$ | $\Rightarrow$ | $x - 8$ |

$$(I) \quad \frac{x}{160} = \frac{x-15}{v} \quad \Rightarrow \quad xv = 160(x-15) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{160(x-15)}{x}$$

$$(II) \quad \frac{x-8}{80} = \frac{x}{2v} \quad \Rightarrow \quad 2v(x-8) = 80x \quad \Rightarrow \quad v = \frac{40x}{x-8}$$

$$\frac{160(x-15)}{x} = \frac{40x}{x-8} \quad \Rightarrow \quad \frac{4(x-15)}{x} = \frac{x}{x-8} \quad \Rightarrow \quad 4(x-15)(x-8) = x^2$$

$$4(x^2 - 8x - 15x + 120) = 4x^2 - 92x + 480 = x^2$$

$$3x^2 - 92x + 480 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{92 \pm 52}{6} = \frac{46 \pm 26}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{72}{3} = 24 \;\; , \;\; x_2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

הפתרון $x = 6\frac{2}{3}\,km$ נפסל בנתוני השאלה: אורך זה (שאמור להיות כל אורך הדרך) קטן מחלק הדרך שנותר לאוטובוס או למונית כשכלי הרכב האחר היה במחצית הדרך: $\boldsymbol{AB = 24_{km}}$ .

**ב.**

$$v = \frac{40x}{x-8} = \frac{40 \cdot 24}{24-8} = \frac{960}{16} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v = 60_{km/h}}$$

---

**.4** $x$ - מהירות זרם הנהר , $4x$ - מהירות סירת המשוטים , $5x$ - מהירות סירת המנוע

עד המפגש

| | מהירות | זמן | | דרך |
|---|---|---|---|---|
| סירת משוטים | $4x + x = 5x$ | $y$ | $\Leftarrow$ | $5xy$ |
| סירת מנוע | $5x + x = 6x$ | $y - 1$ | $\Leftarrow$ | $6x(y-1)$ |

$$5xy = 6x(y-1) \quad \Rightarrow \quad 5y = 6(y-1) = 6y - 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6$$

מנקודת המפגש עד להגעתן של הסירות ל- $A$ ול- $B$ :

| | זמן | | מהירות | דרך |
|---|---|---|---|---|
| סירת מנוע | $\frac{30x}{4x} = \frac{15}{2}$ | $\Rightarrow$ | $5x - x = 4x$ | $5x \cdot 6 = 30x$ |

$$y + \frac{15}{2} = 6 + 7\frac{1}{2} \; = \boldsymbol{13\frac{1}{2}_{hours}}$$

**5.** $x$ - מהירות גוף ב , $x+m$ - מהירות גוף א

| | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|
| גוף א | $x+m$ | $\Leftarrow \quad \frac{160}{x+m} \quad \Rightarrow$ | $160$ |
| גוף ב | $x$ | $\Leftarrow \quad \frac{90}{x} \quad \Rightarrow$ | $90$ |

$$\frac{90}{x}+5=\frac{160}{x+m} \quad /\cdot x(x+m) \quad \Rightarrow \quad 90(x+m)+5x(x+m)=160x \quad /-160x$$

$$90x+90m+5x^2+5mx-160x=0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2+(5m-70)x+90m=0$$

$$\underline{\triangle=0} \quad b^2-4ac=(5m-70)^2-4\cdot5\cdot90m=25m^2-700m+4900-1800m=0 \quad /:25$$

$$m^2-100m+196=0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2}=\frac{100\pm96}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1=\frac{196}{2}=98 \ , \quad m_2=\frac{4}{2}=2$$

$$m=98 \quad \Rightarrow \quad 5x^2+(5\cdot98-70)x+90\cdot98=0 \quad /:5 \quad \Rightarrow \quad x^2+84x+1764=0$$

$$(x+42)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-42 \quad \Rightarrow \quad \times$$

$$m=2 \quad \Rightarrow \quad 5x^2+(5\cdot2-70)x+90\cdot2=0 \quad /:5 \quad \Rightarrow \quad x^2-12x+36=0$$

$$(x-6)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=6 \quad \Rightarrow \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m=2}$$

---

**6. א.** סימון: (I) - הֵלֶך מ־A ל־B , (II) - הֵלֶך מ־B ל־A

$x$ - מהירות (I) , $y$ - מהירות (II)

| | V | T | S |
|---|---|---|---|
| (I) $C \rightarrow B$ | $x$ | $4$ | $4x$ |
| (II) $A \leftarrow C$ | $y$ | $9$ | $9y$ |

$\Rightarrow$

| | V | S | T |
|---|---|---|---|
| (I) $A \rightarrow C$ | $x$ | $9y$ | $\frac{9y}{x}$ |
| (II) $C \leftarrow B$ | $y$ | $4x$ | $\frac{4x}{y}$ |

$$\Rightarrow \quad (1) \quad \frac{9y}{x}=\frac{4x}{y}$$

**ב.**

$$AC=BC+12 \quad \Rightarrow \quad (2) \quad 9y=4x+12 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{4x+12}{9}$$

$$(1) \quad 9y^2=4x^2 \quad \Rightarrow \quad 9\cdot\frac{16x^2+96x+144}{81}=4x^2 \quad /\cdot9 \quad \Rightarrow \quad 16x^2+96x+144=36x^2$$

$$20x^2-96x-144=0 \quad /:4 \quad \Rightarrow \quad 5x^2-24x-36=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{24\pm36}{10}$$

$$x>0 \quad \Rightarrow \quad x=6 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{4\cdot6+12}{9}=4$$

$$\mathbf{x=V_{A\rightarrow B}=6_{km/h} \ , \quad y=V_{B\rightarrow A}=4_{km/h}}$$

$$1,741,725=1^7+7^7+4^7+1^7+7^7+2^7+5^7$$

**יש עוד שלושה מספרים נוספים עם תכונה זו:** $9,926,315 \ ; \ 9,800,817 \ ; \ 4,210,818$

**7. א.**

| | | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|---|
| עד נקודת המפגש | מסוק | $\frac{x}{y}$ | $\Rightarrow$ $y$ | $x$ |
| | מטוס | $\frac{x+100}{y}$ | $\Rightarrow$ $y$ | $x+100$ |
| מנקודת המפגש ליעד | מסוק | $\frac{x}{y}$ | $3$ $\Leftarrow$ | (I) $\frac{3x}{y}=x+100$ |
| | מטוס | $\frac{x+100}{y}$ | $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ $\Leftarrow$ | (II) $\frac{4(x+100)}{3y}=x$ |

$$(I)\quad y=\frac{3x}{x+100}$$

$$(II)\quad y=\frac{4(x+100)}{3x}\quad\Rightarrow\quad\frac{4(x+100)}{3x}=\frac{3x}{x+100}\quad\Rightarrow\quad 4(x+100)^2=9x^2\ \ /\sqrt{\ }$$

$$2(x+100)=\pm3x\quad\Rightarrow\quad(1)\ \ 2x+200=3x\quad\Rightarrow\quad x_1=200\quad\Rightarrow\quad y_1=\frac{3\cdot200}{200+100}=2$$

$$(2)\ \ 2x+200=-3x\quad\Rightarrow\quad-5x=200\quad\Rightarrow\quad x_2=-40$$

$$x>0\quad\Rightarrow\quad x=200\ ,\ y=2\quad\Rightarrow\quad V=\frac{x}{y}=\frac{200}{2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{V=100_{km/h}}$$ **מסוק:**

$$V=\frac{x+100}{y}=\frac{200+100}{2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{V=150_{km/h}}$$ **מטוס:**

**ב.**

$$AB=2x+100=2\cdot200+100\quad\Rightarrow\quad \mathbf{AB=500_{km}}$$

---

**8.** $y$ - הזמן שבו אמורים היו להגיע למכונית

| | מהירות | זמן | דרך |
|---|---|---|---|
| תכנון | $x$ | $y+\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ | (I) $x(y+\frac{1}{4})=21$ |
| בפועל | $x$ | $4$ $\Leftarrow$ | $4x$ |
| | $x+2$ | $y-4-\frac{10}{60}$ $\Leftarrow$ | (II) $(x+2)(y-\frac{25}{6})=21-4x$ |

$$(I)\ \ /\cdot4\quad\Rightarrow\quad 4xy+x=84\quad\Rightarrow\quad xy=\frac{84-x}{4}$$

$$(II)\ \ /\cdot6\quad\Rightarrow\quad(x+2)(6y-25)=126-24x\quad\Rightarrow\quad 6xy-25x+12y-50=126-24x$$

$$6xy=x-12y+176\quad\Rightarrow\quad xy=\frac{x-12y+176}{6}=\frac{84-x}{4}\quad\cdot12$$

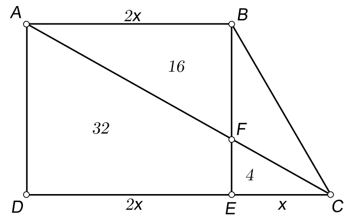
$$2x-24y+352=252-3x\quad\Rightarrow\quad 5x=24y-100\quad\Rightarrow\quad x=\frac{24y}{5}-20$$

$$(I)\ \ 4y(\frac{24y}{5}-20)+\frac{24y}{5}-20=84\ \ /\cdot5\quad\Rightarrow\quad 4y(24y-100)+24y-100=420$$

$$96y^2-400y+24y-100=420\quad\Rightarrow\quad 96y^2-376y-520=0\ \ /:8\quad\Rightarrow\quad 12y^2-47y-65=0$$

$$y_{1,2}=\frac{47\pm73}{24}\ ,\ \ y>0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{120}{24}=5\quad\Rightarrow\quad x=\frac{24y}{5}-20=\frac{24\cdot5}{5}-20\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=4_{km/h}}$$

**8. א.**




(1) $AB \parallel EC \overset{(2)}{\Rightarrow} \triangle ABF \sim \triangle CEF$

(3) $\frac{BC}{EC} = 2 \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{BF}{FE} = 2$ יחס הדמיון

(3) $S_{\triangle CEF} = 4 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{S_{\triangle ABF}}{4} = 2^2 = 4$

$\Rightarrow \mathbf{S_{\triangle ABF} = 16_{cm^2}}$

**ב. (1)**

(6) $EC = x \overset{(7)}{\Rightarrow} AB = 2x$ , (8) $DE = 2x \Rightarrow DC = 3x$

(9) $EF \parallel AD \overset{(2)}{\Rightarrow} \triangle EFC \sim \triangle DAC$ , (7) $\frac{DC}{EC} = \frac{3x}{x} \Rightarrow \mathbf{\frac{DC}{EC} = 3}$

**(2)** (5) $\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle EFC}} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{S_{\triangle DAC}}{4} = 9 \Rightarrow S_{\triangle DAC} = 36$

$S_{ADEF} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle EFC} = 36 - 4 = 32$

$S_{ABED} = S_{ADEF} + S_{\triangle ABF} = 32 + 16 \Rightarrow \mathbf{S_{ABED} = 48_{cm^2}}$

---

(1) בסיסי טרפז מקבילים זה לזה (2) תאלס (3) נתון (4) משפט חוצה־זווית ב־$\triangle CEB$

(5) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון (6) סימון

(7) יחס הדמיון (8) צלעות מלבן שוות זו לזו (9) צלעות מלבן מקבילות זו לזו

**מגדל של פלינדרומים ראשוניים**

**כל הפלינדרומים המספריים הבאים הם מספרים ראשוניים**

2

30203

133020331

1713302033171

12171330203317121

151217133020331712151

1815121713302033171215181

16181512171330203317121518161

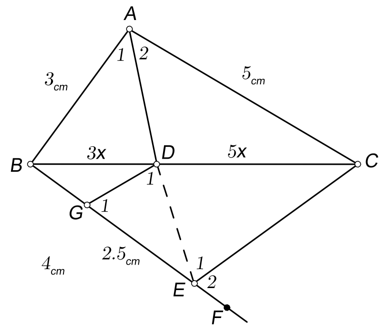
331618151217133020331712151816133

9333161815121713302033171215181613339

11933316181512171330203317121518161333911

לא ידוע אם יש אינסוף פלינדרומים ראשוניים. (**Garland Lee Honaker**, מרצה למתמטיקה בוירג'יניה, ארה"ב)

**9. א.**




$(1)\ \angle A_1 = \angle A_2 \quad \Rightarrow^{(2)} \ \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

$(3)\ BD = 3x \quad \Rightarrow \quad DC = 5x$

$(1)\ GD \parallel EC \quad \Rightarrow^{(4)} \ \frac{BG}{GE} = \frac{BD}{DC} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

$(1)\ BE = 4 \quad \Rightarrow \quad GE = \frac{4}{8} \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{GE = 2.5_{cm}}$

**ב.**

$\angle G_1 =^{(5)} \angle E_2 =^{(1)} \angle E_1 \ , \ \angle D_1 =^{(5)} \angle E_1 \quad \Rightarrow \quad \angle G_1 = \angle D_1 \quad \Rightarrow^{(6)} \mathbf{ED = GE} \ (\checkmark)$

אפשר גם:

$(1)\ \angle E_1 = \angle E_2 \quad \Rightarrow^{(7)} \ \frac{BC}{DC} = \frac{BE}{ED} \quad \Rightarrow \quad \frac{8x}{5x} = \frac{4}{ED} \quad \Rightarrow \quad ED = \frac{4 \cdot 5}{8} = 2.5_{cm}$

$(8)\ GE = 2.5_{cm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ED = GE} \ (\checkmark)$

---

(1) נתון (2) משפט חוצה־זווית במשולש (3) סימון (4) משפט תאלס

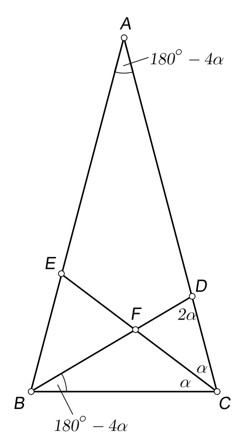
(5) זוויות מתאימות או מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(6) משולש ששתים מזוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה־שוקיים

(7) משפט חוצה־זווית חיצונית במשולש ($\triangle BDE$) (8) הוכח בסעיף א׳

---

**10. א.**




$(1)\ \angle BCE = \angle ACE = \alpha \quad \Rightarrow^{(2)} \ \angle BDC = 2\alpha \ , \ \angle ABC = 2\alpha$

$\underline{\triangle BDC:}\ (3)\ \angle DBC = 180^\circ - 4\alpha$

$\underline{\triangle ABC:}\ (3)\ \angle BAC = 180^\circ - 4\alpha \quad \Rightarrow^{(4)} \ \mathbf{\triangle AEC \sim \triangle BFC} \ (\checkmark)$

**ב.**

$\triangle AEC \sim \triangle BFC \quad \Rightarrow$ יחס הדמיון $= \frac{AC}{BC} = \frac{4a}{2a} = 2$

$\Rightarrow^{(5)} \ \mathbf{\frac{AE+EC+CA}{BF+FC+CB} = 2}$

**ג.**

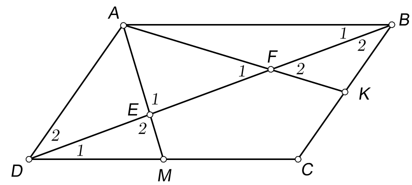
$\triangle AEC \sim \triangle BFC \quad \Rightarrow \quad \frac{EC}{FC} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EF = FC} \ (\checkmark)$

---

(1) סימון (2) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל־ $180^\circ$ במשולש

(4) משפט דמיון זווית־זווית (5) יחס היקף משולשים דומים שווה ליחס הדמיון

**11. א. (1)**




(1) $\angle B_1 = \angle D_1$ , (2) $\angle E_1 = \angle E_2$

(3) $\triangle DEM \sim \triangle BEA \overset{(4)}{\Rightarrow} \mathbf{\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB}}$ (√)

**(2)**

(5) $DM = MC = \frac{1}{2}DC$ , (6) $AB = DC$

$\Rightarrow \frac{DM}{AB} = \frac{1}{2}$

(7) $\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB} \Rightarrow \mathbf{\frac{DE}{EB} = \frac{1}{2}}$

**ב.**

(1) $\angle B_2 = \angle D_2$ , (2) $\angle F_1 = \angle F_2 \overset{(3)}{\Rightarrow} \triangle BFK \sim \triangle DFA$

(4) $\frac{BF}{DF} = \frac{BK}{DA} \overset{(5)}{=} \frac{0.5\ BC}{DA} \overset{(6)}{=} \frac{0.5\ BC}{BC} \Rightarrow \mathbf{\frac{BF}{DF} = \frac{1}{2}}$ (√)

**ג.**

(8) $\triangle BEA \sim \triangle DEM$ , (4) $\frac{AE}{EM} = 2 \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{S_{AED}}{S_{DEM}} = 2$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{S_{AED}}{8} = 2 \Rightarrow \mathbf{S_{AED} = 16_{cm^2}}$

---

(1) זוויות מתחלפות במקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי שוות זו לזו

(2) זוויות קדקודיות שוות זו לזו (3) משפט דמיון זווית־זווית (4) יחס הדמיון

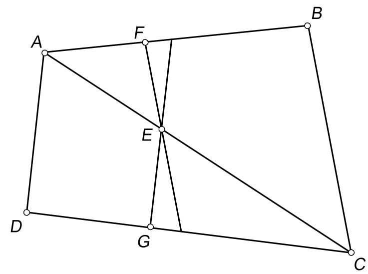
(5) נתון (6) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (7) מסעיף א(1) (8) מסעיף א

(9) הגובה לבסיסים AE ו־ EM זהה לכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים

"I've missed more than 9000 shots in my career.
I've lost almost 300 games.
26 times, I've been trusted to take the game winning shot and missed.
I've failed over and over and over again in my life.
And that is why I succeed."
Michael Jordan

"החמצתי יותר מ־9000 קליעות בקריירה שלי. הפסדתי כמעט 300 משחקים.
26 פעמים סמכו עלי לקלוע את הסל המכריע במשחק והחמצתי אותו.
נכשלתי פעם אחר פעם אחר פעם במהלך חיי. וזו הסיבה מדוע אני מצליח."
מייקל ג'ורדן, כדורסלן עבר אמריקאי. נחשב ככדורסלן הטוב ביותר בכל הזמנים.

**12. א. (1)**




(1) $FE \parallel BC \quad \Rightarrow^{(2)} \mathbf{\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AC}} \quad (\checkmark)$

**(2)**

(1) $EG \parallel AD \quad \Rightarrow^{(2)} \frac{EG}{AD}=\frac{CE}{AC}$

$\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=\frac{AE}{AC}+\frac{CE}{AC}=\frac{AE+CE}{AC}=\frac{AC}{AC}$

$\Rightarrow \mathbf{\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=1} \quad (\checkmark)$

**ב. (1)**

(1) $\frac{EF}{BC}=\frac{2}{5} \quad \Rightarrow^{(3)} \frac{2}{5}+\frac{EG}{AD}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{EG}{AD}=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow^{(2)} \frac{GC}{DC}=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad GC=3x \ , \quad DC=5x$

$DC=DG+GC \quad \Rightarrow \quad 5x=DG+3x \quad \Rightarrow \quad DG=2x \quad \Rightarrow \quad \frac{GC}{DG}=\frac{3x}{2x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{GC}{DG}=\frac{3}{2}}$

**(2)**

(4) $\frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ADG}}=\frac{GC}{DG} \quad \Rightarrow^{(5)} \quad \mathbf{\frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ADG}}=\frac{3}{2}}$

(1) נתון (2) תאלס מורחב (3) מסעיף א

(4) לשני המשולשים גובה משותף לבסיסים DG ו־ GC הנמצאים על ישר אחד (5) מסעיף ב

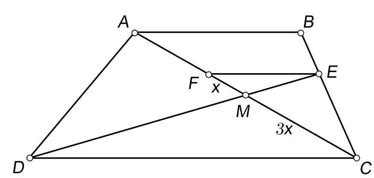
---

**13. א. (1)**

(1) $BC=3\,BE \quad \Rightarrow \quad EC+BE=3\,BE \quad \Rightarrow \quad EC=2\,BE$

$\frac{EC}{BC}=\frac{2\,BE}{3\,BE}=\frac{2}{3}$

(1) $FE \parallel AB \quad \Rightarrow^{(2)} \frac{FE}{AB}=\frac{EC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{FE}{AB}=\frac{2}{3}}$




**(2)**

$\frac{FE}{DC}=^{(1)} \frac{FE}{2\,AB}=^{(3)} \frac{2}{2\cdot 3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{FE}{DC}=\frac{1}{3}}$

**ב.**

(1) $FE \parallel DC \quad \Rightarrow^{(2)} \frac{MC}{FM}=\frac{DC}{FE}=^{(3)} 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{MC=3\,FM} \quad (\checkmark)$

**ג.**

(4) $FM=x \quad \Rightarrow \quad MC=3x \quad \Rightarrow \quad CF=4x$

$\frac{CF}{FA}=\frac{CE}{EB}=^{(5)} 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{AF}=2 \quad \Rightarrow \quad AF=2x \quad \Rightarrow \quad \frac{AM}{MC}=\frac{AF+FM}{MC}=\frac{2x+x}{3x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{AM}{MC}=1}$

---

(1) נתון (2) תאלס מורחב (3) סעיף קודם (4) סימון (5) סעיף א(1)

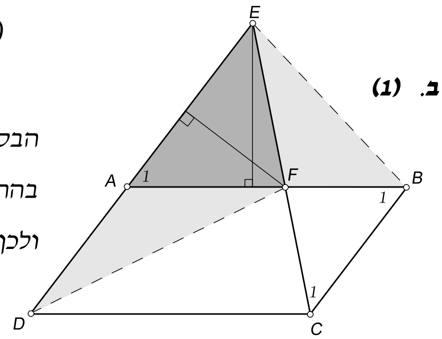
**לכל כלל יש יוצא מן הכלל,**

**וכלל שאין לו יוצא מן הכלל - הוא יוצא מן הכלל האומר שלכל כלל יש יוצא מן הכלל**

**14. א.**

(1) $\angle A_1 = \angle B_1$ , $\angle AEF = \angle C_1$ $\Rightarrow^{(2)}$ $\triangle BCF \sim \triangle AEF$

(3) $\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AE}$ , (4) $BC = AD$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{BF}{AF} = \frac{AD}{AE}}$ $(\checkmark)$




**ב. (1)**

הבסיסים $AD$ ו־ $AE$ של המשולשים $ADF$ ו־ $AEF$ בהתאמה, נמצאים על ישר אחד. לכן יש להם אותו גובה.

ולכן היחס בין שטחיהם שווה ליחס שבין הבסיסים

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}}$ $(\checkmark)$

**(2)**

(5) $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE} =^{(6)} \frac{BF}{FA} =^{(7)} \frac{S_{\triangle BFE}}{S_{\triangle AFE}} \Rightarrow^{(8)} \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{S_{\triangle BFE}}{S_{\triangle AFE}} \Rightarrow$ $\boldsymbol{S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BEF}}$ $(\checkmark)$

---

(1) **זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי - שוות זו לזו**

(2) **משפט דמיון זווית־זווית** (3) **יחס הדמיון** (4) **צלעות נגדיות במקבילית - שוות זו לזו**

(5) **מסעיף ב (1)** (6) **מסעיף א** (7) **ראה הסבר בסעיף ב והשלך על הבסיסים** $FA$ **ו־** $FB$ **עבור המשולשים** $AFE$ **ו־** $BFE$ (8) **כלל המעבר**

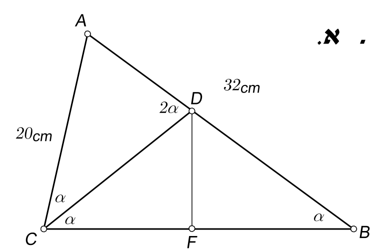
---

**15. א.**

**(1)**

(1) $\angle B = \alpha$ $\Rightarrow^{(2)}$ $\angle ACB = 2\alpha$ , $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$

(3) $\angle ADC = 2\alpha$ $\Rightarrow^{(4)}$ $\boldsymbol{\triangle ACB \sim \triangle ADC}$




**(2)**

(5) $\triangle ACB \sim \triangle ADC$ $\Rightarrow^{(6)}$ $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ $\Rightarrow$ $\frac{AD}{20} = \frac{20}{32}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{AD = 12.5_{cm}}$

**(3)**

(5) $AD = 12.5$ $\Rightarrow$ $BD = 32 - 12.5 = 19.5$

(7) $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ $\Rightarrow$ $\frac{20}{BC} = \frac{12.5}{19.5}$ $\Rightarrow$ $BC = \frac{20 \cdot 19.5}{12.5}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{BC = 31.2_{cm}}$

**ב.**

$\underline{\triangle DBC:}$ $\angle B = \angle C$ $\Rightarrow^{(8)}$ $DC = DB$ , (2) $CF = FB$ $\Rightarrow^{(9)}$ $\boldsymbol{DF \perp BC}$ $(\checkmark)$

---

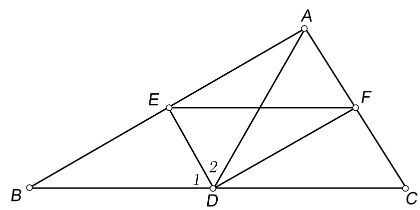
(1) סימון (2) נתון (3) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות האחרות שאינן צמודות לה

(4) משפט דמיון זווית־זווית (5) סעיף קודם (6) יחס הדמיון (7) משפט חוצה זווית במשולש

(8) משולש ששתיים מזוויותיו שוות זו לזו הוא משולש שווה־שוקיים

(9) התיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה

**16. א. (1)**




$\underline{\triangle ADB:}$ $(1)$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EB}$ , $(2)$ $BD=DC$

$\Rightarrow$ $\mathbf{\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}}$ $(\checkmark)$

**(2)**

$\underline{\triangle ADC:}$ $(1)$ $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC}\overset{(3)}{=}\frac{AE}{EB}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}}$ $(\checkmark)$

**(3)**

$(4)$ $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $EF \parallel BC$ $\overset{(6)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{\angle AEF=\angle ABC}$ $(\checkmark)$

**ב. (1)**

$(2)$ $\angle D_1=\angle D_2$ , $DE\perp AB$ $\overset{(7)}{\Rightarrow}$ $AD=DB$ $\overset{(8)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{AE=BE}$ $(\checkmark)$

**(2)**

$(9)$ $AE=BE$ $(2)$ $BD=DC$ $\overset{(10)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{ED=\frac{1}{2}AC}$ $(\checkmark)$

---

(1) משפט חוצה־זווית (2) נתון (3) מסעיף א (4) מסעיף ב (5) תאלס הפוך

(6) זוויות מתאימות במקבילים נחתכים (7) אם חוצה זווית במשולש הוא גם גובה - המשולש הוא ש״ש

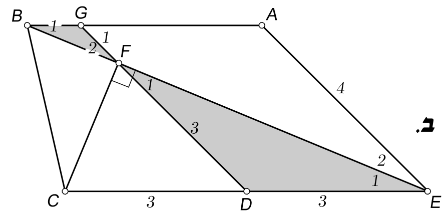
(8) הגובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון (9) מסעיף ב(1)

(10) $ED$ קטע אמצעים במשולש $ABC$ ולכן שווה למחצית הצלע השלישית

**מארק גנסון** (Mark Ganson) גילה את המספר הראשוני הבא, ובו 515 ספרות, כולן 2 ו־ 9 לסירוגין:

92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
92929292929292929292929292929292929292929292929292
929292929292929

**17. א.**




$(1)\ \angle E_1 = \angle B_1\ ,\ (2)\ CD = DE \overset{(3)}{\Rightarrow} FD = DE$

$(4)\ \angle F_1 = \angle E_1 \overset{(2)}{=} E_2 \overset{(5)}{\Rightarrow} \triangle EDF \sim \triangle BAE$

**ב.**

$(6)\ \angle A + \angle E = 180^\circ\ ,\ (7)\ \angle D = \angle A$

$\overset{(8)}{\Rightarrow} \angle D + \angle E = 180^\circ \overset{(9)}{\Rightarrow} GD \parallel AE \overset{(10)}{\Rightarrow}$ **AGDE מקבילית** $(\checkmark)$

**ג.**

$(11)\ \angle F_1 = \angle F_2\ ,\ (1)\ \angle E_1 = \angle B_1 \overset{(5)}{\Rightarrow} \triangle BFG \sim \triangle EFD$

$(12)\ GD = AE \overset{(2)}{=} 4\ ,\ (3)\ FD = DE \overset{(2)}{=} 3 \Rightarrow FG = 1 \overset{(13)}{\Rightarrow} \frac{FG}{FD} = \frac{1}{3}$

$(14)\ \frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle EDF}} = \frac{S_{BGF}}{S} = (\frac{FG}{FD})^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle BGF} = \frac{1}{9}S$ **(יחידות ריבועיות)**

---

(1) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי (2) נתון

(3) תיכון ליתר במשולש ישר־זווית שווה למחצית היתר

(4) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (5) משפט דמיון זווית־זווית

(6) זוויות חד־צדדיות במקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי

(7) זוויות מתאימות במשולשים דומים (8) הצבה

(9) אם סכום זוויות חד־צדדיות בישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי, שווה זו לזו - הישרים מקבילים

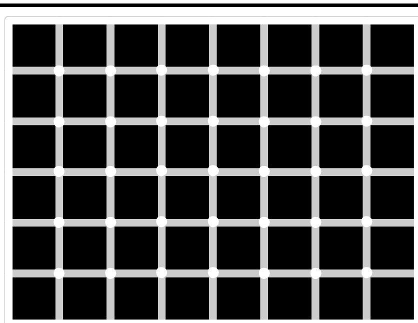
(10) הגדרת מקבילית: כל זוג צלעות נגדיות מקבילות

(11) זוויות קדקודיות (12) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (13) יחס הדמיון

(14) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

**תעתועי ראיה**

הביטו היטב בעיגולים הלבנים שבצמתי הסורגים.
העיגולים בצמתי השריגים הינם לבנים.
אז מדוע הם נראים לנו שחורים,
כשהעין אינה מתמקדת בהם?



# גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות.
המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005.
שאלות עם כוכביות ניתן לפותרן גם בכלים טריגונומטריים.
שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה: 3/4 - מבחן מס׳ 3 שאלה מספר 4 .
את החלוקה הכין **שרון חיים**.

**משולשים**

- חפיפה

$1, 8/5^*, 13/5, 14/4, 28/4$

- משולש שווה־צלעות

$1, 5, 1/4, 16/4$

- משפט פיתגורס

$10/5_b, 13/5$

**מרובעים**

- טרפז

$28/4$

- דלתון

$2, 7/5^*$

- מקבילית

$1/4, 15/4, 16/4, 20/4$

- ריבוע

$4$

- טרפז שווה־שוקיים

$8/5^*$

**שטחים**

$20/4$

**קטעים מיוחדים ונקודות מפגש**

- תיכון ליתר

$5/5$

- מפגש תיכונים במשולש

$14/4$

- קטע אמצעים בטרפז

$28/4$

**מעגל**

- משולש חסום במעגל

$5, 1/4, 4/5, 13/5$

- משולש חוסם מעגל

$7/5^*$

- מרובע חסום במעגל

$1, 5, 6, 14/4, 20/4$

- שני מעגלים

$3, 6, 20/4$

- קטע מרכזים

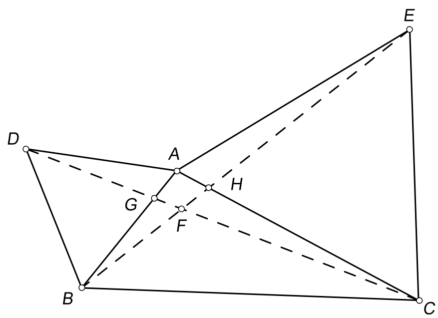
$5/5$

- מפגש חוצי־זוויות במשולש

$7/5^*$

$$\sqrt{41-5}=6$$
$$\sqrt{4411-55}=66$$
$$\sqrt{444111-555}=666$$
$$\sqrt{44441111-5555}=6666$$
$$\sqrt{4444411111-55555}=66666$$
$$\sqrt{444444111111-555555}=666666$$
$$\sqrt{44444441111111-5555555}=6666666$$
$$\vdots$$

## גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה - שאלות




**1.** (005 , קיץ ס״ז - 2007 , מועד א)

על הצלעות AB ו־ AC של המשולש ABC

בנו משולשים שווי־צלעות: ACE ו־ ABD.

**א.** הוכח: $BE = DC$.

BE חותך את הצלע AC בנקודה H.

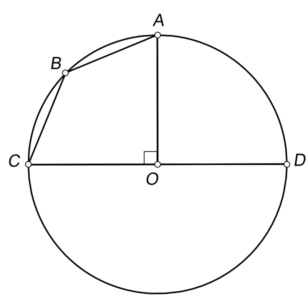
DC חותך את הצלע AB בנקודה G.

BE ו־ DC נפגשים בנקודה F.

**ב.** מצא את גודל הזווית GFB. נמק. הנחיה: סמן: $\angle ADG = \beta$.

**ג.** מה צריך להיות גודל הזווית BAC,

כדי שיהיה אפשר לחסום במעגל את המרובע AHFG ? נמק. **(110)**




**2.** (005 , קיץ ס״ח - 2008 , מועד א)

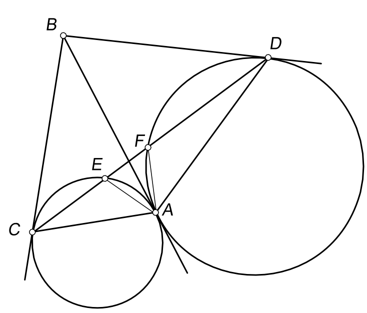
במעגל שמרכזו O הרדיוס AO מאונך לקוטר CD .

**א.** מצא את גודל הזווית ABC. נמק.

נתון גם כי $\angle BCA = \angle BAC$.

**ב.** הוכח כי $BO \perp AC$ .

**ג.** BO ו־ AC נחתכים בנקודה M. הוכח כי $CM = OM$. **(111)**




**3.** (005 , קיץ ס״ח - 2008 , מועד ב)

נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה A.

AB הוא המשיק המשותף לשני המעגלים.

BC משיק למעגל אחד בנקודה C,

ו־ BD משיק למעגל האחר בנקודה D.

CD חותך מעגל אחד בנקודה E, ואת המעגל האחר בנקודה F.

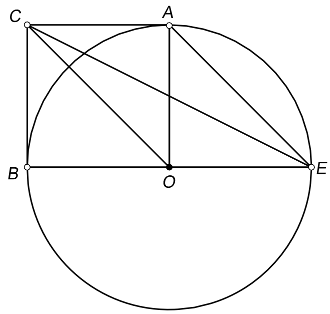
הוכח: **א.** $BC = BD$

**ב.** $\angle CAE = \angle FAD$

**ג.** אם שני המעגלים בעלי רדיוסים שווים, אז $CE = FD$. **(111)**

### תשובות

**1. ב.** $60^\circ$ **ג.** $60^\circ$ **2. א.** $\angle ABC = 135^\circ$




**.4** (005 , אביב ס״ח - 2008 , לוחמים)

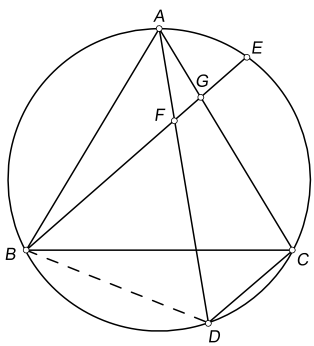
$BE$ הוא קוטר מעגל שמרכזו $O$ .

$CA$ ו־ $CB$ הם שני משיקים למעגל המאונכים זה לזה.

הוכח: **א.** המרובע $ACBO$ הוא ריבוע

**ב.** $\angle AEC = \angle OCE$

**ג.** נתון: $S_{\triangle ACE} = 32_{cm^2}$ . חשב את רדיוס המעגל. **(112)**




**.5** (005 , קיץ תש״ע - 2010 , לוחמים)

$ABC$ הוא משולש שווה־צלעות החסום במעגל.

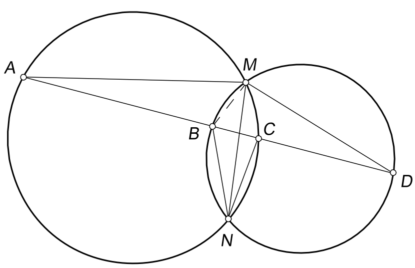
$D$ היא נקודה על הקשת $\overset{\frown}{BC}$ , ו־ $E$ היא נקודה על הקשת $\overset{\frown}{AC}$ כך ש־ $DC$ מקביל ל־ $BE$ .

$BE$ חותך את $AD$ בנקודה $F$ ואת $AC$ בנקודה $G$ .

**א.** הוכח: $\angle ADC = 60^{\circ}$ .

**ב.** הוכח: המשולש $BFD$ הוא שווה־צלעות.

**ג.** הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע $BGCD$ . **(112)**




**.6** (804 , קיץ תש״ע , מועד א)

שני מעגלים נחתכים בנקודות $M$ ו־ $N$.

ישר חותך את שני המעגלים בנקודות $A$ , $B$ , $C$ ו־ $D$ . $\angle BNM = \beta$ , $\angle BNC = \alpha$ .

**א.** הבע באמצעות $\alpha$ ו־ $\beta$ (במידת הצורך) את:

**(1)** $\angle MDB$ . נמק **(2)** $\angle MAC$ . נמק **(3)** $\angle AMD$

**ב.** האם המרובע $AMDN$ הוא בר־חסימה במעגל? נמק. **(113)**

$\Longleftrightarrow$

*שתיית תה ירוק מונעת שבץ. גם המשפט ההפוך נכון: שבץ מונע שתיית תה ירוק . . .*

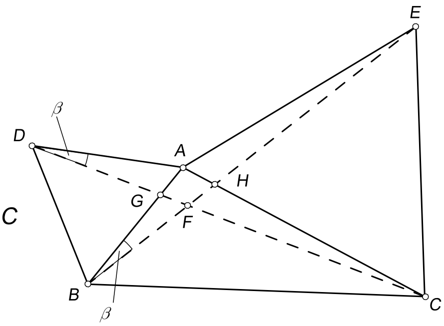
## תשובות

**.4** **ג.** $R = 8_{cm}$

**.6** **א.** **(1)** $\angle MDB = \beta$ **(2)** $\angle MAC = \alpha - \beta$ **(3)** $\angle AMD = 180^{\circ} - \alpha$ **ב.** לא

## גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה - פתרונות

**1. א.**




$\underline{\triangle ADC \cong \triangle ABE :}$ (1) $AD = AB$ , $AC = AE$

(2) $\angle DAC = 60^\circ + \angle BAC$

$\angle BAE = 60^\circ + \angle BAC \quad \Rightarrow \quad \angle DAC = \angle BAC$

$\Rightarrow^{(3)} \quad \triangle ADC \cong \triangle ABE \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \mathbf{BE = DC}$ (√)

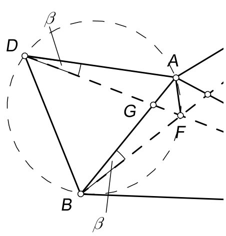
**ב.**

(5) $\triangle ADC \cong \triangle ABE \quad \Rightarrow^{(6)} \quad \angle ADC = \angle ABE = \beta$

$\underline{\triangle DFB :}$ (2) $\angle FDB = 60^\circ - \beta$ , $\angle FBD = 60^\circ + \beta$

(7) $\angle BFD = 180^\circ - (60^\circ - \beta) - (60^\circ + \beta) = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle \mathbf{GFB = 60^\circ}$

דרך נוספת: הקטע AF נראה משתי הנקודות B ו־ D באותה זווית ($\beta$) . לכן הנקודות D , F , A ו־ B נמצאות על מעגל אחד.
משפט זה אינו נכלל בחומר הלימוד.




(8) $\angle BFD = \angle BAD =^{(2)} 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle \mathbf{GFB = 60^\circ}$

**ג.**

(5) $\angle GFB = 60^\circ \quad \Rightarrow^{(9)} \quad \angle GFH = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(10) $\angle GAF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle \mathbf{BAC = 60^\circ}$

---

(1) נתון (משולשים שווי־צלעות) (2) זווית במשולש שווה צלעות היא בת $60^\circ$

(3) משפט חפיפה צלע־זווית־צלע (4) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (5) מסעיף קודם

(6) זוויות מתאימות במשולשים חופפים (7) השלמה ל־ $180^\circ$ במשולש (8) זוויות היקפיות במעגל הנשענות על אותו מיתר - שוות זו לזו (9) זוויות צמודות משלימות ל־ $180^\circ$

(10) מרובע ניתן לחסימה במעגל אם ורק אם זוויותיו הנגדיות משלימות ל־ $180^\circ$

| |
|---|
| **אִמרה חסידית** |
| **העבר – אַיִן . העתיד – עֲדַיִן . ההוה – כהרף עַיִן . דאגה, אם־כן – מִנַּיִן ?** |

## חשבון דיפרנציאלי - פונקציות עם שורש ריבועי - שאלות

(כל השאלות שלא מצוין בהן אחרת בפרק זה, נלקחו משאלון 004.)

**1.** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א)

נתונה הפונקציה $y=\sqrt{ax^2-16a}$ , $a\neq 0$ פרמטר.

**א.** חשב את הערך של $a$ , אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=8$ הוא $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

הצב בפונקציה $a=\frac{1}{2}$ , וענה על הסעיפים הבאים:

**ב.** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

**ג.** מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

**ד.** הראה כי הנגזרת של הפונקציה אינה מתאפסת בתחום ההגדרה של הפונקציה.

**ה.** מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. נמק.

**ו.** מה הם השיעורים של נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה? נמק.

**ז.** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(203)**

**2.** (סתיו ס"ז - 2006 , מועד לוחמים)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-4}}{x}$

**א.** חקור את הפונקציה ומצא את:

**(1)** תחום ההגדרה **(2)** נקודות קיצון וסוגן **(3)** תחומי עליה וירידה

**ב.** נתון גם כי לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=1$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ג.** עבור אילו ערכי $k$ הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת?

**ה.** מצא עבור אילו ערכי $k$ , הישר $y=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ . **(204)**

**הזמן האבוד**

**מה קרה בין** 5.10.1582 **לבין** 14.10.1582 ?

**התשובה היא: כלום, אבל ממש כלום. תינוק לא נולד , עוף לא פרח, ציפור לא צייצה ואפילו השמש לא זרחה אז. בעקבות אי התאמה לעונות השנה שהצטברה בלוח הגרגוריאני במשך שנים, החליט האפיפיור גרגיוס ה־13 למחוק(!) מלוח השנה 10 ימים, כך שהתאריך שלאחר 4.10.1582 היה 15.10.1582.**

## תשובות

**1.** **א.** $a=\frac{1}{2}$ **ב.** $(x\le -4)\cup(x\ge 4)$ **ג.** $(\pm 4,0)$ **ה.** $\searrow: x<-4$ , $\nearrow: x>4$ **ו.** $(\pm 4,0)$

**2.** **א.** **(1)** $x\ge 4$ **(2)** $max(8,1\frac{1}{4})$ , $min_{ep}(4,1)$ **(3)** $\searrow: x>8$ , $\nearrow: 4<x<8$ **ב.** עמ' 251

**ג.** $k_1=1$ , $k_2=1\frac{1}{4}$

**3.** (קיץ תש"ע - 2010 , מועד א) נתונות שלוש פונקציות:

$k>0$ , $f(x)=\sqrt{x+k}$ , $g(x)=x\sqrt{x+k}$ , $h(x)=\frac{\sqrt{x+k}}{x}$ פרמטר.

**א.** הבע באמצעות $k$ את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

**ב.** כל אחד מהגרפים של שלוש הפונקציות חותך את ציר $x$ בחלקו השלילי באותה נקודה.

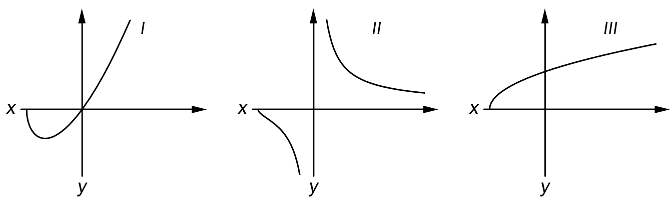
**(1)** הבע באמצעות $k$ את שיעור $x$ של נקודת חיתוך זו.

**(2)** אורך הקטע, המחבר את נקודות החיתוך עם הצירים של גרף הפונקציה $f(x)$ , הוא $\sqrt{6}$ .

מצא את הערך של $k$ .

הצב $k=2$ וענה על הסעיפים ג-ד.

**ג.** בציור לפניך מוצגים שלושה גרפים, III , II , I של הפונקציות $g(x)$ , $f(x)$ ו- $h(x)$.

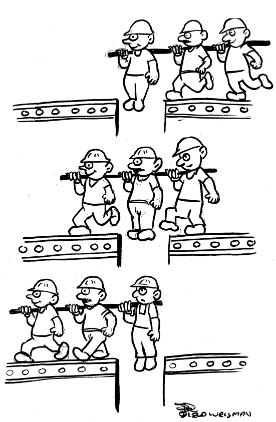



התאם בין הגרפים לפונקציות. נמק.

**ד.** **(1)** מצא את פונקצית הנגזרת של הפונקציה שהגרף שלה הוא II ,

והוכח כי פונקצית הנגזרת שמצאת היא שלילית בכל תחום ההגדרה של הפונקציה II .

**(2)** רשום את תחומי הירידה של הפונקציה שהגרף שלה הוא II . **(205)**



$$0\times 9+1=1$$
$$1\times 9+2=11$$
$$12\times 9+3=111$$
$$123\times 9+4=1111$$
$$1234\times 9+5=11111$$
$$12345\times 9+6=111111$$
$$123456\times 9+7=1111111$$
$$1234567\times 9+8=11111111$$
$$12345678\times 9+9=111111111$$

## תשובות

**3.** **א.** $f,g:\ x\ge -k$ , $h:\ (-k\le x<0)\cup(x>0)$ **ב.** **(1)** $x=-k$ **(2)** $k=2$

**ג.** $h(x)\leftrightarrow II$ , $g(x)\leftrightarrow I$ , $f(x)\leftrightarrow III$

**ד.** **(1)** $h'(x)=\frac{-x-4}{2x^2\sqrt{x+2}}$ **(2)** $\searrow:\ (-2<x<0)\cup(x>0)$

**4.** (804, קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנוז)

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{2 - x^2}$ , $a$ הוא פרמטר.

**א.** הישר $y = -x - \sqrt{2}$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר $y$ .

מצא את הערך של $a$ .

הצב את הערך של $a$ שמצאת, וענה על הסעיפים הבאים.

**ב.** **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

**(2)** פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ , ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

**(3)** מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**ג.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ד.** דרך נקודת המינימום המוחלט ודרך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה העבירו מקבילים לציר $y$ .

מצא את המרחק בין שני המקבילים. **(206)**

**5.** (804, קיץ תשע"א - 2011, מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{-x} + 2$ .

**א.** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

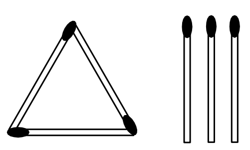
**ב.** מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**ג.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ד.** מצא את משוואת הישר המחבר את נקודות המינימום של הפונקציה.

**ה.** מצא עבור אילו ערכים של $k$ , למשוואה $f(x) = k$ יש שני פתרונות. **(207)**

**בנה ארבעה משולשים שווי־צלעות, חופפים למשולש שבציור, משישה גפרורים.**



**פתרון (בצופן א"ת ב"ש): ומגימקצ יבפכבא.**

## תשובות

**4.** **א.** $a = -1$ **ב.** **(1)** $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ **(2)** $x = 1$ **(3)** $max_{ab.}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , $min_{ab.}(1, -2)$

**ד.** $d = 1 + \sqrt{2}$ (יחידות אורך)

**5.** **א.** $-2 \le x \le 0$ **ב.** $min_{ep.}(0, 2+\sqrt{2})$ , $max\ (-1, 4)$ , $min_{ep.}(-2, 2+\sqrt{2})$

**ד.** $y = 2 + \sqrt{2}$ **ה.** $2 + \sqrt{2} \le k < 4$

## חשבון דיפרנציאלי - פונקציות עם שורש ריבועי - פתרונות

**1. א.**

$$y=\sqrt{ax^2-16a} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{ax^2-16a}}\cdot 2ax=\frac{ax}{\sqrt{ax^2-16a}}$$

$$y'(8)=\sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad \frac{8a}{\sqrt{64a-16a}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad \frac{8a}{\sqrt{48a}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}} \;\;/(\;)^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{64a^2}{48a}=\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{4a}{3}=\frac{2}{3}\;\;/\cdot\tfrac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a=\tfrac{1}{2}}$$

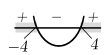
אין צורך לבדוק את נכונות הפתרון (משוואה לא רציונאלית) מאחר ששני אגפי המשוואה (לפני ההעלאה בריבוע) הינם חיוביים, ולכן לא יתקבלו פתרונות זרים.

**ב.-ז.**

$$y=\sqrt{\tfrac{1}{2}x^2-16\cdot\tfrac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=\sqrt{\tfrac{1}{2}x^2-8}}$$

$$\tfrac{1}{2}x^2-8\ge 0\;\;/\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad x^2-16\ge 0$$

$$x_{1,2}=\pm 4 \;,\quad a=1>0 \quad\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\quad \mathbf{(x\le -4)\cup(x\ge 4)}$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{-8}=\emptyset$$

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}x^2-8=0 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}x^2=8 \quad\Rightarrow\quad x^2=16 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(\pm 4,0)}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{0.5x^2-8}}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2x=\frac{x}{2\sqrt{0.5x^2-8}}\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=0}$$ **מחוץ לתחום ההגדרה:**

בנקודות שבהן $x=\pm 4$ ערך הפונקציה הוא $0$ (לעיל)

באותן נקודות הנגזרת אינה מוגדרת (0 במכנה)

מכנה הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי לכל $x$, ולכן סימן הנגזרת $(\pm)$ נקבע ע"י מונה הנגזרת $(x)$:

| x | | $-4$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | $\emptyset$ | $0$ | $\nearrow$ |

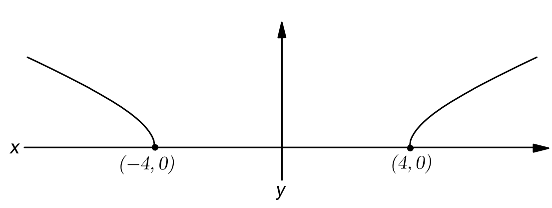
$$\Rightarrow\quad \nearrow:\; \mathbf{x>4} \qquad \searrow:\; \mathbf{x<4}$$

נימוק (לתחומי עליה וירידה): $y'>0 \Rightarrow y\nearrow \;,\; y'<0 \Rightarrow y\searrow$

בתחום: $x<-4$ הפונקציה יורדת $(\searrow)$ $\Leftarrow$ ב־ $x=-4$ היא מקבלת ערך מינימלי $(0)$

בתחום: $x>4$ הפונקציה עולה $(\nearrow)$ $\Leftarrow$ ב־ $x=4$ היא מקבלת ערך מינימלי $(0)$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{min_{ab.}:\;\;(-4,0)\;\;(4,0)}$$



**2. א. (1)**

$f(x)=\frac{x+\sqrt{x-4}}{x} \quad\Rightarrow\quad (x\neq 0)\cap(x-4\geq 0) \quad\Rightarrow\quad (x\neq 0)\cap(x\geq 4) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x\geq 4}$

**(2)**

$f(x)=\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x-4}}{x}=1+\frac{\sqrt{x-4}}{x}$

$f'(x)=0+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-4}}\cdot x-1\cdot\sqrt{x-4}}{x^2}=\frac{x}{2x^2\sqrt{x-4}}-\frac{\sqrt{x-4}}{x^2}=\frac{x-2(x-4)}{2x^2\cdot\sqrt{x-4}}=\frac{8-x}{2x^2\sqrt{x-4}} \quad 0 \quad\Rightarrow\quad x=8$

מכנה הנגזרת חיובי בתחום ההגדרה. לכן מספיק לבדוק את סימן נגזרת המונה ב־ $x=8$

$(8-x)'=-1 \quad\Rightarrow\quad f''(8)<0 \quad\Rightarrow\quad max$

$f(8)=\frac{8+\sqrt{8-4}}{8}=\frac{8+2}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{max:\ (8,1\frac{1}{4})}$

**(3)**

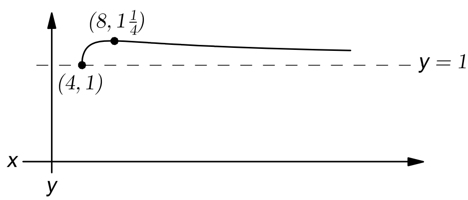
$x\geq 4\ ,\ x_{max}=8 \quad\Rightarrow\quad \nearrow:\ \mathbf{4<x<8}\ ,\ \searrow:\ \mathbf{x>8}$

**ב.**

מהנתון בסעיף זה ניתן למצוא

נקודות קיצון נוספת: $\mathbf{min_{ep.}\,(4,1)}$

ולצרפה לסעיף א(2)




**ג.**

$x=4 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{8+\sqrt{4-4}}{8}=1 \quad,\quad max:\ (8,1\frac{1}{4}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{k_1=1\ ,\ k_2=1\frac{1}{4}}$

**האם מספר לא־רציונאלי בחזקת מספר לא רציונאלי יכול להיות רציונאלי?**

**ובכן, התשובה היא: כן. יש אינסוף אפשרויות כאלה, למרות שאיננו יכולים לדעת מהו!**

**התבונן במספר** $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ **. אם מספר זה הוא רציונאלי - אז מצאנו דוגמה.**

**אם הוא אינו רציונאלי, אז** $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ **הוא הדוגמה.**

**הבסיס (** $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ **) אינו רציונאלי והמעריך אינו רציונאלי. ומתקיים:** $(\surd)\quad 2=\sqrt{2}^{2}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ .

**אפשר ליישם את העקרון גם על** $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ **וכו'**

**3. א.**

$f(x)=\sqrt{x+k} \quad \Rightarrow \quad x+k\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{f:}}\ \mathbf{x\geq -k}$

$g(x)=x\sqrt{x+k} \quad \Rightarrow \quad x+k\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{g(x):}}\ \mathbf{x\geq -k}$

$h(x)=\frac{\sqrt{x+k}}{x} \quad \Rightarrow \quad (x+k\geq 0)\cap(x\neq 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{h(x):}}\ \mathbf{(-k\leq x<0)\cup(x>0)}$

**ב. (1)**

$y=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+k}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=-k}$

**(2)**

$\underline{f(x):}\ x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{k} \quad \Rightarrow \quad (0,\sqrt{k}) \quad , \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-k \quad \Rightarrow \quad (-k,0)$

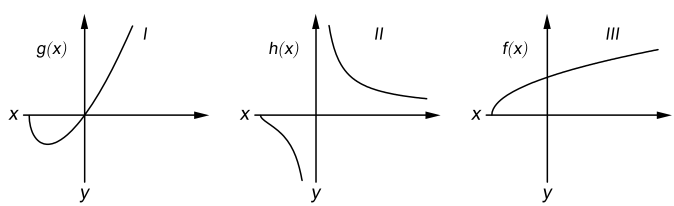
$d((0,\sqrt{k})\leftrightarrow(-k,0))=\sqrt{(0+k)^2+(\sqrt{k}-0)^2}=\sqrt{k^2+k}=\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad k^2+k=6$

$k^2+k-6=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2} \quad , \quad k>0 \quad \Rightarrow \mathbf{k=2}$

**ג.** תחום ההגדרה של $h(x)$ מפוצל. מתאים ל־ II .

$f(x)\geq 0 \ \ \forall\ \{x\geq -2\}$ . מתאים ל־ III .

$\mathbf{f(x)\leftrightarrow III \ \ , \ \ g(x)\leftrightarrow I \ \ , \ \ h(x)\leftrightarrow II}$




**ד. (1)**

$h'(x)=\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot x-1\cdot\sqrt{x+2}}{x^2}=\frac{x-2(x+2)}{2x^2\sqrt{x+2}}=\frac{-x-4}{2x^2\sqrt{x+2}}$

$\underline{(-2\leq x<0)\cup(x>0):} \quad -x-4<0 \quad \Rightarrow \quad h'(x)=\frac{-}{2\cdot+\cdot+} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h'(x)<0}\ \ (\checkmark)$

**(2)**

$\underline{\mathbf{h(x):}}\ \ \underline{\searrow:}\ \ \mathbf{(-2<x<0)\cup(x>0)}$

**עשר שווה עשר בשלישית**

הגימטריה של המילה 'עשר' במילוי (עין - שין - ריש) היא בדיוק $1000 = 10^3$ :

$(70+10+50)+(300+10+50)+(200+10+300)=130+360+510=1000$

(הרב **שמואל יניב**)

**4. א.**

$f(x) = ax - \sqrt{2-x^2}$ , $y = -x - \sqrt{2}$ , $f(0) = y(0) = -\sqrt{2} \Rightarrow \underset{\text{נקודת ההשקה}}{(0, -\sqrt{2})}$

$f'(x) = a - \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \cdot (-2x) = a + \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$ , $f'(0) = -1 \Rightarrow \mathbf{a = -1}$

**ב. (1)**

$f(x) = -x - \sqrt{2-x^2}$ , $2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow$ (−√2 ... √2 : − + −) $\Rightarrow \mathbf{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}}$

**(2)**

$f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2-x^2} \ /(\ )^2 \Rightarrow x^2 = 2 - x^2$

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

$\underline{x = 1:}$ $1 \overset{?}{=} \sqrt{2-1^2} \Rightarrow 1 \overset{\checkmark}{=} 1 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$

$\underline{x = -1:}$ $-1 \overset{?}{=} \sqrt{2-1^2} \Rightarrow -1 \overset{\times}{=} 1$

**(3)**

$$\left.\begin{aligned} f(-\sqrt{2}) &= \sqrt{2} - \sqrt{2-2} = \sqrt{2} \\ f(1) &= -1 - \sqrt{2-1} = -1 - 1 = -2 \\ f(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2} - \sqrt{2-2} = -\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{min_{ab.}: (1, -2)} \ , \ \mathbf{max_{ab.}: (-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$$

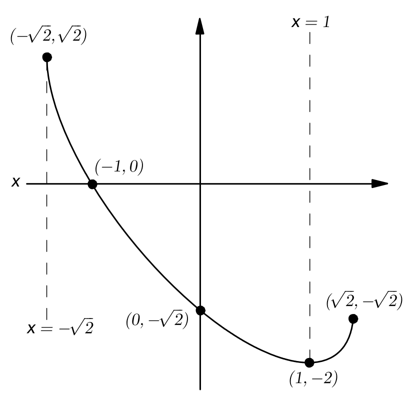
**ג.**

חיתוך עם ציר $x$ :

$f(x) = 0 \Rightarrow -x - \sqrt{2-x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2-x^2} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm 1 \rightarrow$ $\underline{x = 1:}$ $-1 - \sqrt{2-1} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow -2 \overset{\times}{=} 0$

$\underline{x = -1:}$ $-(-1) - \sqrt{2-1} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 1 - 1 \overset{\checkmark}{=} 0 \Rightarrow \underline{(-1, 0)}$




**ד.**

$d((x=1) \leftrightarrow (x=-\sqrt{2})) = 1 - (-\sqrt{2}) \Rightarrow \mathbf{d = 1 + \sqrt{2}}$ **(יחידות אורך)**

**5. א.**

$f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{-x}+2 \quad , \quad (x+2\geq 0)\cap(-x\geq 0)\equiv(x\geq -2)\cap(x\leq 0) \quad \equiv \mathbf{-2\leq x\leq 0}$

**ב.**

$\boxed{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{-1}{2\sqrt{-x}}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{-x}} \quad \Rightarrow \quad x+2=-x$

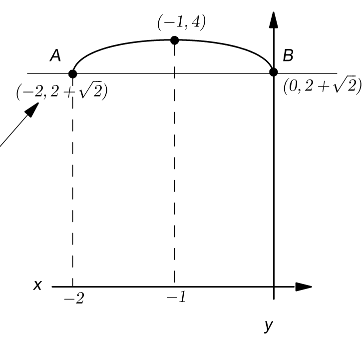
$\Rightarrow \quad 2x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \in \quad \{-2\leq x\leq 0\} \quad (\surd)$

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $min_{ep.}$ | $\nearrow$ | $max$ | $\searrow$ | $min_{ep.}$ |

$f(-2)=2+\sqrt{2} \quad , \quad f(-1)=1+1+2=4 \quad , \quad f(0)=2+\sqrt{2}$

$\mathbf{min_{ep.}: \quad (-2,2+\sqrt{2}) \quad , \quad (0,2+\sqrt{2}) \quad , \quad max\ (-1,4)}$

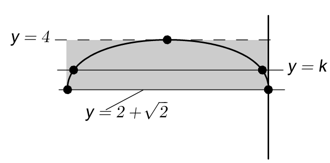
**ג.**




**ד.**

$y_A=y_B=2+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=2+\sqrt{2}}$

**ה.** ראה ציור:




$\Rightarrow \quad \mathbf{2+\sqrt{2}\leq k<4}$

$1380^2+19019^2=19069^2 \quad , \quad S_{\triangle}=\frac{1380\cdot 19019}{2}=\underline{13,123,110}$

$3059^2+8580^2=9109^2 \quad , \quad S_{\triangle}=\frac{3059\cdot 8580}{2}=\underline{13,123,110}$

$4485^2+5852^2=7373^2 \quad , \quad S_{\triangle}=\frac{4485\cdot 5852}{2}=\underline{13,123,110}$

**זוהי השלישיה הקטנה ביותר של משולשי פיתגורס בעלי שטח שווה**

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

## חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות - שאלות

**.1** (004 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sin x}$ בתחום $0<x<\pi$.

**א.** בתחום הנתון מצא את: **(1)** האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר $y$.

**(2)** נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר $x$.

**(3)** נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

**ב.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון. **(211)**

**.2** (004 , קיץ תש"ע - 2010 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x)=tg\,x-2x$ בתחום $0\le x\le\pi$ .

בתחום הנתון: **א.** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,

ואת האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר $y$ .

**ב.** מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

**ג.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(211)**

**.3** (004 , קיץ תש"ע - 2010 , מועד א - המבחן הגנוז)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{1-\sin x}$ , בתחום $0\le x\le 2\pi$ , $a\neq 0$ פרמטר.

בתחום הנתון מצא את:

**(1)** תחום ההגדרה של הפונקציה.

**(2)** האסמפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר $y$ .

**(3)** סימן הפרמטר $a$ , אם ידוע כי בנקודה שבה $x=\pi$ הפונקציה יורדת.

**ב.** **(1)** גרף הפונקציה חותך בתחום הנתון את הישר $y=1$ בשלוש נקודות

שבהן: $x=2\pi$ , $x=\pi$ , $x=0$ . מצא את ערך הפרמטר $a$ .

**(2)** הצב את הערך של $a$ שמצאת, ומצא בתחום הנתון את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**ג.** עבור $a$ שמצאת, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון. **(212)**

## תשובות

**.1** **א.** **(1)** $x=\pi_{\rightarrow}$ , $x=0_{\leftarrow}$ **(2)** $(\frac{\pi}{2},0)$ **(3)** $max:\ (\frac{\pi}{2},0)$

**.2** **א.** ת"ה: $(0\le x<\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2}<x\le\pi)$ אס: $x=\frac{\pi}{2}$

**ב.** $\nearrow$: $(\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4})$ , $\searrow$: $(0<x<\frac{\pi}{4})\cup(\frac{3\pi}{4}<x<\pi)$

**.3** **א.** **(1)** $x\neq\frac{\pi}{2}$ **(2)** $x=\frac{\pi}{2}$ **(3)** $sign\ (a)=+$

**ב.** **(1)** $a=1$ **(2)** $max_{ep.}(2\pi,1)$ , $min\ (\frac{3\pi}{2},\frac{1}{2})$ , $min_{ep.}(0,1)$

**4.** (006 , קיץ תשס"ד - 2004 , מועד ב)

נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2}{4} - \sin x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

**א. (1)** מצא בתחום הנתון את שיעורי $x$ ו־$y$ של נקודות הפיתול של הפונקציה.

**(2)** מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\smile$), וכלפי מטה ($\frown$).

**ב.** ידוע שבתחום הנתון הנגזרת של הפונקציה מתאפסת רק ב־$x = 1.025$ בקירוב.

על סמך הנתונים, ועל סמך סעיף א', שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(213)**

**5.** (006 , חורף תשס"ה - 2005) נתונה הפונקציה $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

**א.** גזור והוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא $y' = -\sin 4x$.

בתחום הנתון מצא את: **ב.** שיעורי $x$ של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**ג.** שיעורי $x$ של נקודות הפיתול של הפונקציה.

**ד.** התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מטה ( $\frown$ ). **(213)**

**6.** (006 , חורף תשס"ו - 2006) נתונה הפונקציה $y = 4\cos^3 x + 15\cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

**א.** מצא, בתחום הנתון, את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**ב.** מצא, בתחום הנתון, את שיעורי ה־$x$ של נקודות הפיתול של הפונקציה,

ואת תחומי קעירות הפונקציה כלפי מטה ($\frown$), וקעירות הפונקציה כלפי מעלה ($\smile$). **(214)**

**7.** (006 , קיץ תשס"ז - 2007 , מועד א)

נתונה הפונקציה $f(x) = 8\sin^2 x - \cos 4x$ בתחום $0 \le x \le \frac{4\pi}{5}$.

**א.** מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

**ב.** מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\smile$ ,

ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה $\frown$ בתחום הנתון.

**ג.** מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$ בתחום הנתון. נמק. **(215)**

## תשובות

**4. א. (1)** $(\frac{11}{6}\pi, 8.79)$ $(\frac{7}{6}\pi, 3.86)$ **(2)** $\frown$: $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ , $\smile$: $(0 < x < \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi)$

**5. ב.** $\max(\frac{\pi}{2}, 1)$ , $\min(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ , $\max(0, 1)$ **ג.** $x_1 = \frac{\pi}{8}$ , $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ **ד.** $\frown$: $(0 < x < \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2})$

**6. א.** $\min_{ab.}(\pi, -19)$ , $\max_{ab.}(0, 19)$

**ב.** $\frown$: $(0 < x < \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3})$ , $\smile$: $(\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{2\pi}{3} < x < \pi)$

**7. א.** $\min(\frac{4\pi}{5}, 3.59)$ , $\max(\frac{\pi}{2}, 7)$ , $\min(0, -1)$ **ב.** $\frown$: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{5}$ , $\smile$: $0 < x < \frac{\pi}{6}$ **ג.** אחד

**8.** (006 , קיץ תשס"ז - 2007 , מועד ב מיוחד)

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{b}(\sin 4x - \cos 4x)$ .

הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ מקביל לישר $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

**א.** מצא את ערך הפרמטר $b$.

**ב.** מצא את תחומי העליה של הפונקציה בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$. **(216)**

**ג.** עבור איזה ערך של $m$ יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק שלושה פתרונות בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ?

**9.** (חורף תשס"ט - 2009)

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^2 x - a^2 \cos x$ , $a > \sqrt{2}$ , בתחום $0 \le x \le 2\pi$ .

**א.** בתחום הנתון מצא (הבע באמצעות $a$ במידת הצורך) את:

**(1)** נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר $x$ . **(217)**

**(2)** השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**(3)** התחום שבו פונקציה הנגזרת $f'(x)$ חיובית, ואת התחום שבו $f'(x)$ שלילית. נמק.

**ב.** **(1)** על סמך תת־סעיף א(2) ותת־סעיף א(3), סרטט סקיצה של $f'(x)$ בתחום הנתון.

**(2)** נתון כי כל השטח בין הגרף של $f'(x)$ ובין ציר $x$ בתחום הנתון הוא 16 (י"ר).

מצא את $a$ .

**פרדוקס המעטפות**

*נתונות לפניך שתי מעטפות אטומות, כשבכל אחת מהן סכום כסף. נתון גם שאחת המעטפות מכילה סכום כפול מאשר המעטפה האחרת. עליך לבחור את אחת המעטפות והסכום שבה - שלך.*

*נניח שבחרת מעטפה ובה 100 ש'. המנחה מאפשר לך להחליף את בחירתך במעטפה האחרת. נראה כי כדאי לך לעשות זאת: יש לך סיכוי של 50% להפסיד 50 ש' (אם במעטפה האחרת 50 ש') ו־50% להרויח 100 ש' (אם במעטפה האחרת 200 ש'). הרווח גדול מההפסד. נו, אם כך זה לא משנה איזו מעטפה בחרת בתחילה.*

*יותר מזה: גם אם לא פתחת אותה כדאי לך לכאורה להחליף את המעטפות, מאותו שיקול: הרווח גדול מההפסד, והסיכויים לרווח או הפסד שווים.*

*נניח שלא פתחת את המעטפה השניה, הרי מאותו שיקול בדיוק כדאי לך לחזור לבחירתך הראשונה . . .*

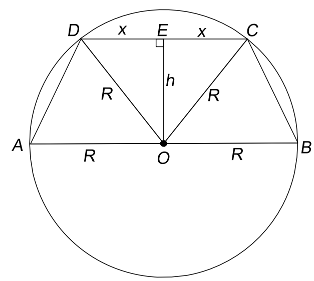
## תשובות

**8.** **א.** $b = 4$ **ב.** $(0 < x < \frac{3}{16}\pi) \cup (\frac{7}{16}\pi < x < \frac{\pi}{2})$ **ג.** $m = -\frac{1}{4}$

**9.** **א.** **(1)** $(\frac{\pi}{2}, 0)$ $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ **(2)** $max_{ab.}: (\pi, 1 + a^2)$ , $min_{ab.}: (0, 1 - a^2)$ $(2\pi, 1 - a^2)$

**(3)** $+: 0 < x < \pi$ , $-: \pi < x < 2\pi$ **ב.** **(2)** $a = 2$

**.4**




$h=\sqrt{R^2-x^2}$

$S=\frac{(AB+CD)\cdot h}{2}=\frac{(2R+2x)\cdot\sqrt{R^2-x^2}}{2}=(R+x)\sqrt{R^2-x^2}$

S היא פונקציה חיובית, ולכן מקסימום שלה מתקבל

באותם שיעורי x שבהן $S^2$ מקבלת מקסימום

$S^2=y=(R+x)^2(R^2-x^2)=(R^2+2Rx+x^2)(R^2-x^2)$

$y'=\underbrace{2(R+x)(R^2-x^2)+(R+x)^2\cdot(-2x)}_{\text{נגזרת של מכפלה}}=2(R+x)(R^2-x^2-x(R+x))=2(R+x)(-2x^2-Rx+R^2)\overset{?}{=}0$

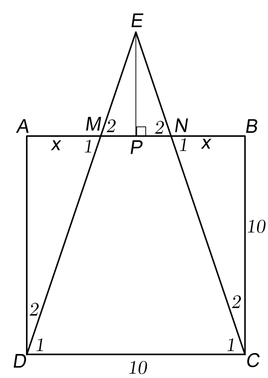
$x_1=-R\ \underset{x>0}{(\times)}\quad,\quad x_{2,3}=\frac{R\pm\sqrt{R^2+8R^2}}{-4}=\frac{R\pm3R}{-4}\rightarrow x_2=\frac{4R}{-4}=-R\ \underset{x>0}{(\times)}\ ,\ x_3=\frac{-2R}{-4}=\frac{R}{2}\ (\checkmark)$

$y''=(2R^3-6x^2R-4x^3)'=-12xR-12x^2\quad\Rightarrow\quad y''(\frac{R}{2})=-6R^2-3R^2<0\quad\Rightarrow\quad x_{max}=\frac{R}{2}$

$CD=2x=2\cdot\frac{R}{2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{CD=R}$ **(יחידות אורך)**

---

**.5**




$ED=EC\quad\Rightarrow\quad\angle D_1=\angle C_1\quad\Rightarrow\quad\angle D_2=\angle C_2$ (זווית)

$AD=BC$ (צלע) ; $\angle A=\angle B\ (=90^\circ)$ (זווית)

$\Rightarrow\quad\triangle AMD\cong\triangle BNM\quad\Rightarrow\quad AM=NB=x\quad\Rightarrow\quad MN=10-2x$

$AB\|CD\quad\Rightarrow\quad\angle M_2=\angle D_1=\angle C_1=\angle N_2\quad\Rightarrow\quad EM=EN$

$\underset{\text{ב״ע}}{EP\perp MN}\quad\Rightarrow\quad MP=PN=\frac{10-2x}{2}=5-x$

$\angle M_1=\angle M_2\ ;\ \angle A=\angle EPM\ (=90^\circ)\quad\Rightarrow\quad\triangle MAD\sim\triangle MPE$

$\Rightarrow\quad\frac{AD}{EP}=\frac{AM}{MP}\quad\Rightarrow\quad\frac{10}{EP}=\frac{x}{5-x}\quad\Rightarrow\quad EP=\frac{50-10x}{x}$

$y=S=S_{MAD}+S_{NBC}+S_{MNE}=\frac{10x}{2}+\frac{10x}{2}+\frac{(10-2x)\cdot\frac{50-10x}{x}}{2}=10x+\frac{(5-x)(50-10x)}{x}$

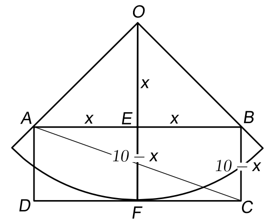
$y=10x+\frac{10x^2-100x+250}{x}=10x+\frac{10x^2}{x}-\frac{100x}{x}+\frac{250}{x}=20x+\frac{250}{x}-100$

$y'=20-\frac{250}{x^2}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad\frac{250}{x^2}=20\quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{250}{20}=\frac{25}{2}=12.5\ ,\ x>0\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{12.5}_{cm}$

$y''=(20-250x^{-2})'=-(-2)\cdot250x^{-3}=\frac{500}{x^3}\quad\Rightarrow\quad y''(\sqrt{12.5})=\frac{500}{(\sqrt{12.5})^3}>0\quad\Rightarrow\quad min\ (\checkmark)$

$\Rightarrow\quad \mathbf{AM=\sqrt{12.5}_{cm}=3.54_{cm}}$

**.6**




$(1)\quad \angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

$(1)\quad OE = x \quad\Rightarrow\quad EF = BC = 10-x$

$OF \perp DC\ ,\ AB \parallel DC \quad\Rightarrow\quad OE \perp AB \quad\Rightarrow\quad AEFD\ ,\ BEFC$ מלבנים

$(1)\quad DF = FC \quad\Rightarrow^{(2)}\quad AE = EB \quad\Rightarrow^{(3)}\quad OA = OB$

$\Rightarrow^{(4)}\quad \angle OAB = \angle OBA =^{(5)} 45^\circ \quad\Rightarrow^{(6)}\quad \angle AOE = \angle BOE\ (=45^\circ)$

$\Rightarrow\quad \angle EOB = \angle EBO\ (=45^\circ) \quad\Rightarrow^{(7)}\quad BE = EO = AE = x$

$\underline{\triangle ABC:}\quad (8)\quad AC = f(x) = \sqrt{(2x)^2+(10-x)^2}$

פונקצית המרחק היא פונקציה חיובית, ולכן:

שיעורי $x$ של נקודות הקיצון שלה הן שיעורי $x$ של נקודות הקיצון של ריבוע הפונקציה:

$g(x) = (f(x))^2 = (2x)^2 + (10-x)^2 = 4x^2 + 100 - 20x + x^2 = 5x^2 - 20x + 100$

$g'(x) = 10x - 20 \stackrel{?}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad x = 2$

$g''(x) = 10 \quad\Rightarrow\quad g''(2) = 10 > 0 \quad\Rightarrow\quad min\ (\checkmark)$

$\Rightarrow\quad min\ f(x) = f(2) = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{16+64} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{min\ AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ cm}$

---

(1) נתון (2) צלעות נגדיות במלבן שוות זו לזו

(3) משולש שגובה שלו הוא גם תיכון הוא משולש שווה־שוקיים

(4) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (5) השלמה ל־$180^\circ$ במשולש ישר־זווית AOB

(6) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם חוצה־זווית

(7) משולש שזוויות הבסיס שלו שוות זו לזו - הוא משולש שווה־שוקיים (8) פיתגורס

**1709**

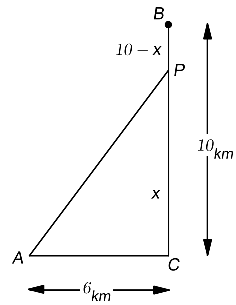
**1709 הוא מספר ראשוני. אם נוסיף לו באמצע את הספרות 57 הוא עדיין יישאר ראשוני,**
**וכך גם אם נחזור על פעולה זו 8 פעמים. כלומר: כל המספרים להלן הם ראשוניים:**

$1,709\ ;\ 175,709\ ;\ 17,575,709\ ;\ 1,757,575,709\ ;\ 175,757,575,709$

$17,575,757,575,709\ ;\ 1,757,575,757,575,709$

$175,757,575,757,575,709\ ;\ 17,575,757,575,757,575,709$

**7.** נסמן: $PC = x \quad \Leftarrow \quad BP = 10 - x$. נוסחאות דרך/מהירות/זמן: $s = tv \ , \ t = \frac{s}{v}$




$\underline{\triangle PCA:}\ \ AP = \sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2} \quad \Rightarrow \quad t_{AP} = \frac{\sqrt{36+x^2}}{v}$

$t_{PB} = \frac{10-X}{2.6V} \quad \Rightarrow \quad \underline{time:\ f(x) = \frac{\sqrt{36+x^2}}{v} + \frac{10-x}{2.6v}}$

$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}v\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{2.6v} \overset{?}{=} 0$

$\frac{x}{\cancel{v}\sqrt{36+x^2}} = \frac{1}{2.6\cancel{v}} \quad \Rightarrow \quad 2.6x = \sqrt{36+x^2} \ \ /(\ )^2$

$\Rightarrow \quad 6.76x^2 = 36 + x^2 \quad \Rightarrow \quad 5.76x^2 = 36$

$\Rightarrow \quad x^2 = 6.25 \ \ /\sqrt{\ } \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.5 \ \ , \ \ x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 2.5_{km}}$

בדיקה שאכן מתקבל מינימום בנקודה $x = 2.5$. התחום של $x$: $0 \leq x \leq 10$

| $x$ | $0$ | | $2.5$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-^{*}$ | $0$ | $+^{**}$ | |
| $y$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

$\Rightarrow \quad \textbf{min} \ (\checkmark)$

$y' = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{2.6}\right) \quad \Rightarrow \quad (*) \quad f'(1) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\sqrt{37}} - \frac{1}{2.6}\right) = -\frac{0.22}{v} < 0$

$(**) \quad f'(3) = \frac{1}{v}\left(\frac{3}{\sqrt{45}} - \frac{1}{2.6}\right) = \frac{0.06}{v} > 0$

---

**8.** בנתונים: $S$ - קבוע, $v$ - משתנה (בתפקיד של $x$), זמן הנסיעה הוא: $\frac{S}{v}$ (מהירות/דרך = זמן)

$y$ - פונקציית ההוצאות

$y = 0.004\,v \cdot S + \frac{S}{v} \cdot 0.001v^2 + 32 \cdot \frac{S}{v} = 0.004S\,v + 0.001S\,v + \frac{32S}{v}$

$y = 0.005S\,v + \frac{32S}{v}$

$y' = 0.005S - \frac{32S}{v^2} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 0.005S = \frac{32S}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{32S}{0.005S} = 6400 \quad \Rightarrow \quad v = \pm 80$

$v > 0 \quad \Rightarrow \quad v \overset{?}{=} 80$

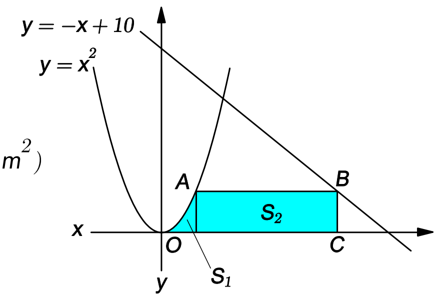
$y'' = \left(0.005S - \frac{32S}{v^2}\right)' = \frac{64S}{v^3} \quad \Rightarrow \quad y''(80) = \frac{64S}{80^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{min} \ (\checkmark) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v = 80_{km/h}}$

**המילה 'חשבון' מופיעה בתורה כשם עירו של סיחון, מלך האמורי.**
**עיר זו נכבשה על ידו מידי מלך מואב הראשון (זה שלפני בלק).**

**9.** ניסוח השאלה אינו חד־משמעי.

בהסתמך על הציור הנתון, אנו מניחים שכוונת השואל היא שהנקודה $A$ היא ברביע הראשון,

בתחום שבו בפרבולה היא מתחת הקו הישר.




$$x_A = m \quad \Rightarrow \quad y_A = m^2 \quad \Rightarrow \quad A(m, m^2)$$

$$y_B = y_A = m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = -x_B + 10$$

$$\Rightarrow \quad x_B = 10 - m^2 \quad \Rightarrow \quad B(10 - m^2, m^2)$$

$$AB = x_B - x_A = 10 - m^2 - m$$

$$BC = y_B = m^2$$

$$S_2 = BC \cdot AB = m^2(-m^2 - m + 10) = -m^4 - m^3 + 10m^2$$

$$S_1 = \int_0^m x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^m = \frac{m^3}{3} - 0 = \frac{m^3}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = f(m) = -m^4 - m^3 + 10m^2 + \frac{m^3}{3} = -m^4 - \frac{2m^3}{3} + 10m^2$$

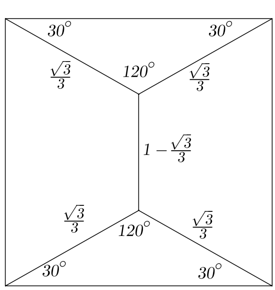
$$f'(m) = -4m^3 - 2m^2 + 20m = -2m(2m^2 + m - 10) \overset{?}{=} 0$$

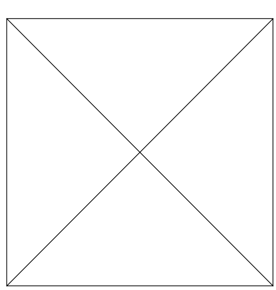
$$m_1 = 0 \ , \quad m_{2,3} = \frac{-1 \pm 9}{4} \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2 \ , \ m_3 = -\frac{5}{2} \quad ; \quad m > 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

$$f''(m) = -12m^2 - 4m + 20 \quad \Rightarrow \quad f''(2) = -12 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 20 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad max \ (\surd)$$

עבור $m = 2$ הנקודה $A$ נמצאת אכן בתחום שבו הפרבולה הינה מתחת הקו הישר:

ערך $y$ בפרבולה הוא: $y = 2^2 = 4$ וערך ה־ $y$ על הישר הוא: $y = 10 - 2 = 8$ .



**נתון ריבוע שאורך צלעו – יחידת אורך אחת.**

**מהי הרשת (קטעים וצמתים) הקצרה ביותר,**

**המחברת את כל קודקודי הריבוע?**

**לא להאמין, אבל אלו אינם שני אלכסוני הריבוע!**

**אלא דוקא הרשת המתוארת בציור השמאלי.**

**סכום אורכי אלכסוני הריבוע הוא $2\sqrt{2}$ י"א,**

**ואורכי הקטעים בציור משמאל הוא $\sqrt{3} + 1$ י"א.**

**החישוב אינו קשה:**

$$\sqrt{3} + 1 \ < \ 2\sqrt{2} \ /(\ )^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 + 2\sqrt{3} + 1 \ < \ 4 \cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{3} \ < \ 4$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{3} \ < \ 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{3} + 1 < 2\sqrt{2} \ \ (\surd)$$

**10. א.**

$$f(x) = x\sqrt{x^2+2} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 1\cdot\sqrt{x^2+2} + x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

כדי למצוא את השיפוע המינימלי יש למצוא את המינימום המוחלט של $\underset{\text{סימון}}{g(x)} = f'(x)$

$$g'(x) = \left(\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\right)' = \frac{4x\sqrt{x^2+2} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}\cdot(2x^2+2)}{x^2+2} = \frac{4x(x^2+2)-x(2x^2+2)}{(x^2+2)^{1.5}}$$

$$= \frac{4x^3+8x-2x^3-2x}{(x^2+2)^{1.5}} = \frac{2x^3+6x}{(x^2+2)^{1.5}} = \boxed{\frac{2x(x^2+3)}{(x^2+2)^{1.5}}} \overset{?}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

$m$ - שיפוע הישר המשיק הנדרש. $g(x)$ מוגדרת עבור כל $x$:

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $\frac{-+}{+} = -$ | $0$ | $\frac{++}{+} = +$ |
| $g$ | ↘ | min | ↗ |

$$x_{min(g)} = 0 \quad\Rightarrow\quad m_{min} = \frac{2\cdot 0^2+2}{\sqrt{0^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \underline{m=\sqrt{2}}$$

$$f(0) = 0\cdot\sqrt{4+0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{(0,0)} \quad\Rightarrow\quad y-0=\sqrt{2}\,(x-0) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y=\sqrt{2}\,x}$$

**ב.** (מדהים בפשטותו!) שיפוע ישר הוא טנגנס הזווית שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר $x$:

$$tg\,\alpha = \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha = 54.74^\circ}$$

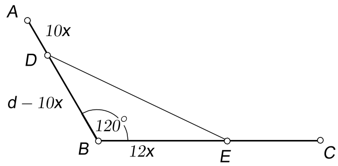
### **א - סימון מתמטי מקצועי**

*האות 'אָלֶף' בעברית ('א') משמשת כסימון מקצועי במתמטיקה לציון 'קבוצות אינסופיות בנות־מניה' ('בנות־מניה' - שניתן לספור את אבריהן לפי סדר כלשהו). קבוצות כאלו הן, למשל, כל המספרים הטבעיים, או כל המספרים הזוגיים. המספרים הממשיים (הכוללים את המספרים ש'אינם נגמרים אחרי הנקודה העשרונית') הם קבוצה אינסופית שאינה 'בת־מניה'. הסימון העברי מקורו במתמטיקאי היהודי **קנטור** שעסק בענף זה של המתמטיקה. כל המתמטיקאים בסין, למשל, מכירים לפחות אות עברית אחת - 'א'.*

*'עוצמתם' של קבוצות בנות המניה מסומנת ב־ $\aleph_0\ \ \aleph_1\ \ \aleph_2\ \ldots$.*

*קנטור עצמו, אגב, גמר את חייו בבית משוגעים לאחר שלקה בהתמוטטות עצבים כתוצאה מדיכאון שנבע ממאבק בינו לבין פרופסור מכובד באוניברסיטת ברלין, ליאופולד קרונקר. אותו קרונקר היה אחד ממוריו של קנטור. הוא חלק על קנטור, ובהמשך אפילו תיעב ממש את תפיסתו של קנטור. קרונקר מנע מקנטור משרה באוניברסיטת ברלין ודחק אותו לאוניברסיטה שולית.*

*במאבק האישי בין קנטור לקרונקר ניצח אמנם קרונקר (קנטור, כאמור, סיים את חייו בבית חולים לחולי נפש), אבל קנטור, לעומת זאת, ניצח בנכונות תפיסתו וקבלתה על ידי קהילת המתמטיקאים. התיאוריה שלו היוותה את היסוד לענף חדש שלם במתמטיקה: **תורת הקבוצות**. לקנטור, זה היה כבר מאוחר מדי.*




**11.** נסמן: $x$ - משך זמן רכיבת הרוכבים

כעבור $x$ שעות: $DB = d - 10x \quad \Rightarrow \quad AD = 10x$

וכן: $BE = 12x$

המרחק $DE$ תלוי ב־ $x$.

זוהי פונקצית מרחק ולכן היא חיובית.

מספיק, אם־כן, לבדוק עבור איזה $x$ נקבל מינימום <u>בריבוע</u> המרחק.

נפעיל את משפט הקוסינוסים על $\triangle DBE$ :

$$DE^2 = f(x) = (d - 10x)^2 + (12x)^2 - 2 \cdot 12x \cdot (d - 10x) \cdot \cos 120^\circ$$

$$= (d - 10x)^2 + 144x^2 + 12xd - 120x^2$$

$$f'(x) = 2(d - 10x) \cdot (-10) + 288x + 12d - 240x$$

$$x_{min} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad f'(2.5) = 0 \quad \Rightarrow \quad -20(d - 25) + 720 + 12d - 600 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -8d = -620 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d = 77.5_{km}}$$

## טודרוס אבו־אַל־עַאפְיָה – וירטואוז הלשון העברית

טודרוס אבו־אַל־עַאפְיָה (1247–1300) ממשוררי תור הזהב בספרד חיבר את השיר הבא:

יָהּ, תָּעוֹז גֶּשֶׁם כָּפַף צָר      לֵב נִאֵץ קָטֹן מֵחַסְדָּךְ
נָס בַּקֵּשׁ, הַט אֹזֶן, כַּפֵּר,      גַּם מֵחֵץ יָעוּף תַּצֵּל דָּךְ
הָפֵץ יָם מַס שָׁטַף לִבּוֹ,      צַק חֵן עֵת אֶזָּכֵר נֶגְדָּךְ,
יָצָא הֶחָג תַּם קֵץ וזמָן,      סַכֵּל טֶרֶף נֶפֶשׁ עַבְדָּךְ

השיר אינו פשוט להבנה. נסביר את השורה הראשונה:

יה – הקב"ה , גשם – גופו הגשמי של האדם , תעוז – חַזֵּק מלשון עוז

כפף – כופף , צר – אויב , נִאֵץ – בִּזָּה, חִלֵּל

וזה מה ש'התכוון המשורר במאמרו':

ה', חזק את הגוף, אותו גוף שהאויב כפפו מרוב צרות,

למרות שלִבִּי שחִלֵל את כבודך 'קטֹן מחסדך' – קטן מלהיות ראוי שתעשה עימו חסד

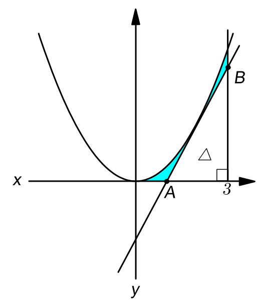
ועכשו שימו לב:

**בכל אחת מהשורות יש 27 אותיות בדיוק – כל 22 אותיות האלף־בית, כולל 5 האותיות הסופיות – מנצפ"ך !!!**

והנה עוד שורת הברקה של אותו משורר, על אותו עיקרון:

צִיץ הַזְּמָן, רָם דִּגְלְךָ      כְּנֵס בְּחֹק־עֵת אַף שְׁפוֹט !

**12. א.**




משוואת הישר המשיק:

$$x_0 = t \ , \ \ y_0 = t^2 \ , \ \ y'(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad y - t^2 = 2t(x-t)$$

$$\Rightarrow \quad y = 2t\,x - t^2$$

חישוב השטח:

$$\underline{S_\triangle :} \ \ \underline{x_A :} \ 2t\,x - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = \tfrac{t}{2}$$

$$\underline{y_B :} \ y = 2t \cdot 3 - t^2 \quad \Rightarrow \quad y_B = 6t - t^2$$

$$S_\triangle = \frac{(3-\frac{t}{2}) \cdot (6t - t^2)}{2} = \frac{(6-t)(6t-t^2)}{4} = \frac{36t - 6t^2 - 6t^2 + t^3}{4} = 9t - 3t^2 + \tfrac{1}{4}t^3$$

$$S = \int_0^3 x^2\,dx - S_\triangle = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 - S_\triangle = 9 - 9t + 3t^2 - \tfrac{1}{4}t^3$$

$$S = f(t) = 9 - 9t + 3t^2 - \tfrac{1}{4}t^3$$

$$f'(t) = -9 + 6t - \tfrac{3}{4}t^2 \overset{?}{=} 0 \ \ / \cdot \tfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad -t^2 + 8t - 12 = 0$$

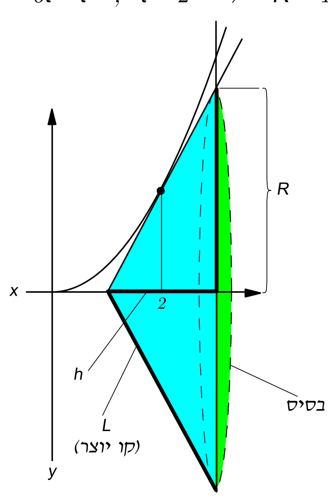
$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} = 4 \mp 2 \ , \ \ 0 < t < 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

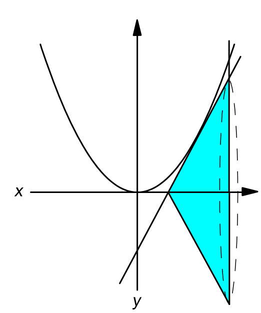
$$f''(t) = 6 - \tfrac{3}{2}t \quad \Rightarrow \quad f''(2) = 6 - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \min \ (\checkmark) \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

$$\min S = f(2) = 9 - 9t + 3t^2 - \tfrac{1}{4}t^3 = 9 - 18 + 12 - 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\min S = 1}$$ **(יחידה ריבועית)**

**ב.**

$$R = y_B = 6t - t^2 \ , \ \ t = 2 \quad \Rightarrow \quad R = 12 - 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R = 8}$$ **(יחידות אורך)**



## הפרדוקס של ברטנרד (1749 – 1827 Joseph Louis Francois Bertrand)

ב־1812 פרסם המתמטיקאי הצרפתי **לפלס** (1749–1827 **Pierre Simon de Laplace**) את ספרו החשוב 'התאוריה האנליטית של ההסתברות', בו הוא מגדיר הסתברות של מאורע: תהי $\Omega$ – קבוצת כל האפשרויות של תוצאת ניסוי, ותהי $A$ תת־קבוצה של $\Omega$. אזי, $P(A)$ היא מנת החילוק של מספר איברי $A$ במספר איברי $\Omega$: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

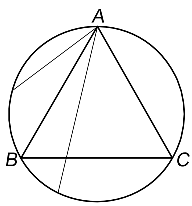
כל זאת בתנאי שהתוצאות הינן שוות־הסתברות, מה שמצמצם את ההגדרה לקבוצות בנות מניה סופיות.

בנות מניה: שניתן למנות אותם, כמו המספרים השלמים, בניגוד למספרים ממשיים, למשל.

**ברטנרד** פרסם את הפרדוקס המתואר כאן, כדי להצביע על הבעייתיות בהגדרה של **לפלס**:

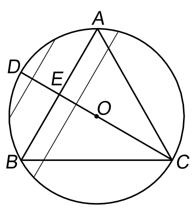
נתון מעגל החוסם משולש שווה צלעות. מעבירים מיתר מקרי במעגל.

מהי ההסתברות שאורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש?



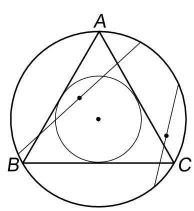

<u>פתרון 1:</u> נציב את אחד מקודקודי המשולש על אחת מנקודות הקצה של המיתר. אם נקודת הקצה השניה של המיתר נמצאת על הקשת $\overset{\frown}{BC}$ – הרי שאורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש. אחרת – הוא קצר ממנה.

$P=\frac{1}{3} \Leftarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$.




<u>פתרון 2:</u> נציב את המשולש, כך שהמיתר יהיה מאונך לאחד מגבהי המשולש, או להמשכו, כמתואר בציור. $OE=\frac{1}{2}R$ (הוכח כתרגיל). אם חיתוך המיתר עם הגובה הוא בקטע $OE$ – הוא ארוך מצלע המשולש, אחרת (אם החיתוך הוא בקטע $DE$) – אורכו קצר מאורך צלע המשולש.

$P=\frac{1}{2} \Leftarrow OE=ED=\frac{1}{2}R$.




<u>פתרון 3:</u> נתבונן במעגל החסום במשולש הנתון. שטח המעגל החוסם גדול פי ארבעה משטח המעגל החסום במשולש (הוכח כתרגיל). מיתר במעגל נקבע באופן יחיד ע"י נקודת האמצע שלו. אם אמצע המיתר בתוך המעגל החסום – אורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש, אחרת – אורכו קצר מאורך צלע המשולש.

$P=\frac{1}{4} \Leftarrow$.

איך זה יכול להיות? ובכן, כל הפתרונות נכונים. אלא מאי? מרחב המדגם 'כל המיתרים' שאליו התייחסנו באופן טבעי, אינו 'מוגדר היטב' (כלומר, הקביעה שהמיתר נבחר באופן מקרי אינה מגדירה די הצורך את הסיכוי לבחירה), והראָיָה שהוא אינו 'מוגדר היטב' היא הפרדוקס המתואר. הסבר מלא של מרחבי מדגם רציפים ומידות ההסתברות שניתן להגדיר עליהם נמצאים מעבר לרמה התיכונית. בכל זאת, נצביע על כיוון ההסבר: בשלושת הפתרונות הוגדרו מרחבי מדגם שונים עם התפלגות אחידה, המביאים לתוצאות שונות בחישוב הסתברות המאורע:

מרחב המדגם בפתרון הראשון הוא כל זוגות הנקודות על היקף המעגל.

מרחב המדגם בפתרון השני הוא כל הנקודות על הקוטר.

מרחב המדגם בפתרון השלישי הוא כל הנקודות בתוך העיגול של המעגל החוסם.

ניתן להוכיח (וזה החלק הקשה) שמאורעות שווי־הסתברות בפתרון אחד, אינם שווי־הסתברות בפתרון אחר. מכאן שאין לצפות לקבל אותה תשובה. אילו המרחב היה אינסופי בדיד (כמו המספרים הטבעיים), אזי קרוב לודאי שלא היה נוצר פרדוקס מעין זה. כאן מדובר במרחבי מדגם רציפים (כמו המספרים הממשיים).

לא הבנתם? לא נורא. ה'פרדוקס' (שלמעשה אינו כזה), בכל מקרה, יותר יפה מהפתרון שלו.

בסיכומו של דבר, הקשיים הלוגיים בתורת ההסתברות של **לפלס** הוכחו כמינוריים. יחד עם זאת, הנסיון להתגבר עליהם הוביל לאקסיומטיזציה (מלשון 'אקסיומה') של תורת ההסתברות ב־1933 על ידי המתמטיקאי הרוסי **אנדריי ניקולאיביץ' קולמוגורוב** (1903–1987).

(לזכרו של **פרופסור בנו ארבל** ז"ל, שסייע לי בנושא זה. נפטר בכ"ז בניסן תשע"ג. יהי זכרו ברוך.)

## סימנים מתמטיים המופיעים בספר

$\cup$ - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x < 2$ או $x > 9$ ייכתב כך: $(x < 2) \cup (x > 9)$

$\cap$ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x < 8$ וגם $x > 1$ הוא התחום: $1 < x < 8$ .
נרשום זאת כך: $\underline{1 < x < 8} \Rightarrow (x > 1) \cap (x < 8)$ .

$(\surd)$ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

$\in$ - שייכות. דוגמה: $x \in [1, 9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1, 9]$ או: $1 \le x \le 9$
דוגמה: $(1, 2) \notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1, 2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו־ D .

$\forall$ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$ . כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

דוגמה: $\frac{(x-1)^2}{x^6} > 0 \ \forall \{x \ne 0 , x \ne 1\}$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ־ 0 לכל x השונה מ־ 0 ושונה מ־ 1 .

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $6x^2 - x - 15 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 19}{12} = \ldots$
זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\Delta}$ ובבדיקת החישוב.

**'ללא הגבלת הכלליות'** - קביעת ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור להצטמצם בהמשך). למשל, אם יש למצוא גודל זווית לפי יחסי צלעות, ניתן לקבוע אורך אחת מהן כ־1 (יחידת אורך אחת, או כל ערך אחר).

**$\emptyset$** - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-5}}{3} = \emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון

**ep.** - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד־צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד־צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5, 6) : min_{ep}$.

**ab.** - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7, 11) : max_{ab}$.

**$cm^2$** - סמ"ר , **$cm^3$** - סמ"ק , **asym.** - אסימפטוטה , **infl.** - פיתול (inflection)

$\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , למשל: $f \nearrow \forall x > 6$ - המשמעות: הפונקציה f(x) עולה בתחום $x > 6$

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

**$x \to a+$** - שאיפה ל־ a מימין , למשל: '$x \to 0+$' הכוונה היא לשאיפה $0.1, 0.01, 0.001 \ldots$
**$x \to a-$** - שאיפה ל־ a משמאל , למשל: '$x \to 0-$' הכוונה היא לשאיפה $0.9, 0.99, 0.999 \ldots$

**lim** - קיצור של limit, גבול.
למשל: $\lim_{x \to \infty} (x) = 5$ : הגבול של f(x) כאשר x 'שואף' ל־ $\infty$ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y = 5$).

**$y_{\rightarrow} = k$** - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד.
**$y_{\leftarrow} = k$** - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד.

**<u>ללא הגבלת הכלליות</u>** - הסבר

כשצריך למצא יחסים בין חלקים שונים ללא נתוני גודלם, מסמנים בדרך כלל, את גודל אחד החלקים בפרמטר, נניח $a$, ואת החלקים האחרים בהתאם ליחס שלהם לפרמטר שקבענו.

במקרים כאלה ניתן לקבוע מספר (במקום פרמטר) שנח לנו לעבוד איתו ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות', שזה אומר שאותו גודל שקבענו הוא מקרה פרטי המתאים גם לכל גודל אחר.

<u>דוגמה:</u> אורך אחד הניצבים במשולש ישר־זווית גדול פי שלושה מאורך הניצב האחר.

פי כמה גדול אורך היתר מאורך הניצב הקטן?

<u>פתרון:</u> ברור מנוסח השאלה שלא משנה מהם אורכי צלעות המשולש אלא רק היחס ביניהם.

נסמן את אורך הניצב הקטן ב־$a$ . מכאן שאורך הניצב הגדול הוא $3a$.

נפעיל את משפט פיתגורס ואז אורך היתר הוא:

$$\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2}=a\sqrt{10}$$

ולכן היתר גדול מהניצב הקטן פי $\sqrt{10}=\frac{\cancel{a}\sqrt{10}}{\cancel{a}}$ .

בפתרון זה היינו רשאים לקבוע את אורך הניצב הקטן כ־$1$ (ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות').

לכן אורך הניצב הגדול היה $3$ ואורך היתר היה $\sqrt{10}$. היחס שהיה מתקבל הוא בדיוק אותו יחס.

אם היינו קובעים את אורך הניצב הקטן כ־ $8$. אורך הניצב הגדול היה $24$. אורך היתר היה $24\sqrt{10}$, והיחס המבוקש היה בדיוק אותו יחס - $\sqrt{10}=\frac{24\sqrt{10}}{24}$.

מכאן שניתן לבחור במקרים כאלה את אורך אחד הגדלים לנוחותנו ומשם להמשיך בפתרון.

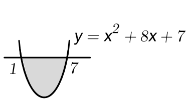
'פטנט' זה מאושר לשימוש בפתרון מבחני הבגרות על־ידי משרד החינוך.

**<u>שינוי גבולות אינטגרציה בחישוב שטח</u>** - הסבר

חישוב שטח בין גרף פונקציה לבין ציר x הנמצא מתחת לציר x נותן ערך שלילי.

השטח הינו הערך המוחלט של אותו ערך שקיבלנו.

ישנן מספר אפשרויות כדי לקבל את הערך הנכון.




1. סימון כל הביטוי בערך מוחלט:

$$S=\left|\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+4x^2+7x\right)\Big|_7^1\right|=$$

$$\left|\left(\frac13+4+7\right)-\left(\frac{343}{3}+98+49\right)\right|=\left|11\frac13-261\frac13\right|=|-250|=250$$

2. הצמדת מינוס לביטוי:

$$S=-\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =-(-250)=250$$

3. הפיכת גבולות האינטגרציה (לשם כך התכנסנו . . . ):

$$S=\int_7^1(x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =261\frac13-11\frac13=250$$

# סיווג שאלות המבחנים – חלק א

*סוגריים מרובעים – מספר העמוד, שאר המספרים – מספרי השאלות. את הסיווג הכין **שרון חיים**.*

**בעיות מילוליות**

**בעיות תנועה [1]**

- רכב/הלך אחד (או יותר) בהלוך — 3, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18
- שני רכבים/הלכים הנעים אחד מול השני — 6, 7, 9, 16, 17, 19
- שייט עם/נגד כיוון הזרם — 2, 4
- אי-שוויון — 18
- הבעה באמצעות פרמטר — 5, 6
- עם אחוזים — 16, 19
- משפט פיתגורס — 1, 12

**בעיות הספק [18]**

- כללי — 3, 4
- עם אחוזים — 1, 2, 5
- אי-שוויון — 3
- הבעה באמצעות פרמטר — 3

**סדרה חשבונית [23]**

- נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה — 2, 7
- סדרה יורדת/עולה — 2
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים — 2, 3, 9
- סימנים מתחלפים/היפוך סימנים — 8
- סדרה בת 2n איברים — 6
- סדרה בת 3n איברים — 1
- סכום איברים אחרונים — 1, 6
- איבר המסתיים בספרה מסוימת — 7
- שתי סדרות $(a_n,b_n)$ — 11
- חלוקה במספר טבעי — 9
- מחיקת איברים — 5
- הבעה באמצעות פרמטר — 5
- בעיות מעשיות תנועה — 4, 10

**סדרה הנדסית [31]**

- נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה — 2
- איברים עוקבים — 1
- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים — 5
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים — 6
- סדרה בת 2n איברים — 5
- שתי סדרות $(a_n,b_n)$ — 3
- שלוש סדרות $(a_n,b_n,c_n)$ — 4
- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה — 1, 3, 5, 6
- הבעה באמצעות פרמטר — 4, 6

**סדרה הנדסית אינסופית יורדת [36]**

- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים — 1, 2, 5
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים — 3, 4
- סכום ריבועי האיברים — 2, 6
- שתי סדרות $(a_n,b_n)$ — 4
- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה — 2, 3, 4, 6
- הבעה באמצעות פרמטר — 3, 4

*מקור הביטוי 'עץ או פלי' הוא בתקופת השלטון הבריטי בארץ.*
*על צד אחד של מטבע בערך מִיל היה מצויר עץ ובצידו*
*האחר היה רשום 'פלשתינא (א"י)'.*

## הסתברות - מיון לפי פרקי הלימוד [49]

**עקרונות בסיסיים של חיתוך ואיחוד מאורעות, הסתברות מותנית ללא טבלה**
6, 7, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 26, 28, 32, 33, 36, 37, 38

**התפלגות בינומית (נוסחת ברנולי)**
- שימוש בנוסחת ברנולי בלבד
27, 29
- חישוב מדויק
37
- חישוב לכל הפחות
38
- חישוב לכל היותר
37

**תרשים עץ (ניתן לפתור גם ללא שימוש בתרשים)**
4, 11, 25, 30, 34

**טבלה דו-ממדית**
1, 2, 3, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 31, 35, 39, 40

**הבעה באמצעות פרמטר**
28, 33

## הסתברות - נושאים שונים [49]

- כדורים וכדים
4, 11, 15, 26, 30, 34, 36
- הצלחה/כשלון במבחני בי"ס
8, 21
- מבחן רב-ברירה
14, 23
- סיכויי קבלה
17, 19, 22, 29,
- הטלת קוביה
32
- משחקים ופרסים
12, 28, 37
- קלפים
33

## טריגונומטריה במישור - ללא מעגל [132]

**משולשים**
- חישובים במשולש
4
- משולש שווה-שוקיים
5, 9
- משולש שווה-צלעות
2, 8

**מרובעים**
- מעוין
6
- טרפז
1, 7
- טרפז שווה-שוקיים
3

## טריגונומטריה במישור - עם מעגל [144]

**משולשים**
- משולש שווה-שוקיים
4, 18
- נקודת מפגש חוצי-זוויות במשולש ישר-זווית
6

**מרובעים**
- מקבילית
5
- מעוין
20
- טרפז
11, 18

**מעגל**
- חישובים במעגל
2, 8, 14, 16, 19
- מעגל חוסם משולש (כלשהו)
1, 4, 5, 6, 7, 17, 20, 21
- מעגל חוסם משולש ישר-זווית
10
- מעגל חוסם משולש שווה-שוקיים
3, 9, 12, 13, 15
- מעגל חסום במשולש שווה-שוקיים
15
- מרובע חסום במעגל
1
- מלבן חסום במעגל
21

## חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים

**בעיות ערך קיצון [234]**

כלכלה
- פונקציה רציונאלית
8

תנועה
- פונקציה פולינומיאלית
11
- פונקציית שורש
7

גאומטריה
- פונקציה פולינומיאלית
1, 4
- פונקציה רציונאלית
5
- פונקציית שורש
6

גרפים
- פונקציה פולינומיאלית
2, 9, 12
- פונקציית רציונאלית
3
- פונקציית שורש
10

## חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה

**בעיות ערך קיצון [234]**

פונקציה פולינומיאלית
- תנועה
11
- גאומטריה
1, 4
- גרפים
2, 9, 12

פונקציה רציונאלית
- כלכלה
8
- גאומטריה
1, 4
- גרפים
2, 9, 12

פונקציית שורש
- תנועה
7
- גאומטריה
6
- גרפים
10

**המשפטים בגאומטריה**

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- $180^\circ$.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא $180^\circ$.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא $180^\circ$ אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא $180^\circ$.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

**37.** אלכסוני מלבן שווים זה לזה.

**38.** מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

---

**39.** בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

**40.** טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.

**41.** בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

**42.** טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

**43.** קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

**44.** בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.

---

**45.** שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

**46.** נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי $2$ מהחלק האחר).

---

**47.** כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.

**48.** אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.

**49.** שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

**50.** בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

---

**51.** כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.

**52.** כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.

**53.** כל משולש ניתן לחסום במעגל.

**54.** במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

---

**55.** שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

---

**56.** ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$.

**57.** מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

**58.** כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

**59.** בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

**60.** דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

---

**61.** במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

**62.** במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

**63.** במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.

**64.** מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

**65.** מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.

**66.** במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.

**67.** האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

**68.** קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

**69.** במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

**70.** במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.

**71.** במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

**72.** במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.

**73.** זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ($90^\circ$).

**74.** זווית היקפית בת $90^\circ$ נשענת על קוטר.

**75.** במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

**76.** במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

**77.** המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

**78.** ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

**79.** זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

**80.** שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

**81.** קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

**82.** קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

**83.** נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

**84.** משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

**85.** משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

**86.** במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

**87.** משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

**88.** אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של $30^\circ$, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

**89.** אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה $30^\circ$.

---

**90.** משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

**91.** משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

**92.** משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

**93.** חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

**94.** ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

**95.** משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

**96.** משפט דמיון זווית־זווית.

**97.** משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

**98.** במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

**99.** אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. (99–101 לחמש יחידות בלבד)

**100.** אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

**101.** אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

**102.** במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

**103.** הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

**104.** סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)\,180^\circ$.

## נוסחאון הבגרות לחמש יחידות

### אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ , \ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \ , \ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a \neq 0$ , השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

| | סדרה חשבונית | סדרה הנדסית |
|---|---|---|
| כלל נסיגה | $a_1 = a \ , \ a_{n+1} = a_n + d$ | $a_1 = a \ , \ a_{n+1} = a_n \cdot q$ |
| האיבר ה־n־י | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ |
| סכום | $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ | $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$<br>סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$ |

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \ ; \ a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b \ , \ a^{\log_a b} = b \ , \ \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \ , \ \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \ , \ \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})] \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$ , $\underline{b}$ , $\underline{c}$ : $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$ : $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$ : $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0 \ , \ \underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$ : $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

## גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע $m$ של ישר העובר דרך הנקודות $(x_1,y_1)$ ו־$(x_2,y_2)$ :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

משוואת ישר $y=mx+b$ עם שיפוע $m$ העובר בנקודה $(x_1,y_1)$ :

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

הנקודה $C$ המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1,y_1)$ ו־$B(x_2,y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC}=\frac{k}{l}$ היא:
$$\left(\frac{lx_1+kx_2}{k+l}\ ,\ \frac{ly_1+ky_2}{k+l}\right)$$

שני ישרים בעלי שיפועים $m_1$ ו־$m_2$ מאונכים זה לזה אם ורק אם:
$$m_1\cdot m_2=-1$$

מרחק הנקודה $(x_0,y_0)$ מהישר $Ax+By+C=0$ :

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

בנקודה $(x_0,y_0)$ שעל המעגל היא:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2=2px$

בנקודה $(x_0,y_0)$ שעל הפרבולה היא:
$$y\cdot y_0=p(x+x_0)$$

## הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־$k$ הצלחות מתוך $n$ נסיונות בהתפלגות בינומית,

כאשר ההסתברות להצלחה היא $p$ :

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad,\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית:
$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- נוסחת בייס:
$$P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

את המספר הראשוני $5039$ ניתן להציג כך: $5039=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!+5\cdot 5!+6\cdot 6!=7!-1$

## טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: ($R$ - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: ($\gamma$ היא הזווית הכלואה בין $a$ ל-$b$) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של $\alpha$ רדיאנים: $l = \alpha R$ , שטח גִזרה של $\alpha$ רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ ($\alpha$ היא הזווית הכלואה בין $b$ ל-$c$)
- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ ($B$ - שטח הבסיס , $h$ - גובה הגוף)

  חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ ($R$ - רדיוס העיגול , $l$ - הקו היוצר)

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ ($t$ ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , $(\sin x)' = \cos x$

  $(\cos x)' = -\sin x$ , $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ , $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$ , $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

  נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

  נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

  נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של $u$ לפי $x$ (נגזרת פנימית) ו-$f'(u)$ היא נגזרת של $f$ לפי $u$ (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי)

  אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

  $\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$ , $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$