

## מספר מילים לפני

בעקבות תפיחתו של ספר הבגרויות לשאלון זה עד כרי אי-נוחות, חלקתי אותו לשני חלקים: החלק הראשון מכיל את רב שאלות הבגרות מהשנים 2004-2013 במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון זה בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. שאלות שחסרות כאן ממבחינים אלו נמצאים בחלקו השני של הספר. החלק השני מכיל את כל 36 המבחנים במתכונת הנוכחית, החל מ-2009. בתקופת החפיפה של שתי מתכונות המבחן (2009-2013), היו שאלות שהופיעו בשתי המתכונות. חלק קטן מהשאלות נלקחו משנים מוקדמות יותר ועוד חלק קטן מהשאלות נלקחו מהשאלון השלישי של שלוש יחידות (003). לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה).

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:  $\forall$  - לכל,  $\in$  - שייך,  $\nearrow$  - עליה,  $\searrow$  - ירידה,  $\cup$  - איחוד: היחס 'או',  $\cap$  - חיתוך: היחס 'וגם',  $\emptyset$  - קבוצה ריקה (אין פתרון)  $\sqrt{\quad}$  - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח,  $ab$  - מוחלט,  $ep$  - נקודת קצה (end point) **'ללא הגבלת הכלליות'** - קביעה ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך).

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה. ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

**סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במקושת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.**

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי ברואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה **שריף אמארה** מכפר וְלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשע"ט - 2019), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלְחַתִּי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדודות לאומית או יהודית.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

## ב ה צ ל ח ה

א' א' א'

**16.** (4 יח, חורף תשמ"ז - 86) רוכב אופניים יצא בשעה 5.30 בבוקר לחיפה מקיבוץ המרוחק ממנה ב- $35 \text{ km}$ . בשעה 6.00 בבוקר יצא רוכב אופניים שני לחיפה מאותו קיבוץ. הרוכב השני נע במהירות הגדולה מזו של הראשון ב-2 קמ"ש לשעה ופגש את הרוכב הראשון לפני הגיעו לחיפה. חצי שעה לאחר הפגישה הגיע הרוכב הראשון לחיפה. מצא את מהירותו של הרוכב הראשון. (13)

**17.** (4 יח, קיץ תשמ"ז - 87) המרחק בין שני מקומות A ו- B הוא  $81 \text{ km}$ . שני רוכבי אופניים יצאו בריזמנית, האחד מנקודה A והשני מנקודה B, ונסעו זה לקראת זה. אחרי שעה אחת ו-40 דקות עדיין לא נפגשו, אך המרחק ביניהם הצטמצם ל- $6 \text{ km}$  בלבד. הרוכב שיצא מ- A עבר את כל הדרך עד B בשעה וחצי פחות מאשר הרוכב שיצא מ- B ל- A. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים. (13)

**18.** (4 יח, קיץ תשמ"ח - 88) המרחק בין שתי ערים הוא  $450 \text{ km}$ . משאית יצאה לדרכה מעיר אחת לשנייה. לאחר שנסעה במהירות קבועה במשך שתיים, נאלצה להתעכב במשך 40 דקות בגלל תקלה. לאחר התיקון המשיכה המשאית מיד בדרכה, במהירות הגדולה ב-5 קמ"ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה לעיר השנייה 25 דקות לאחר הזמן שתוכנן מראש. מה היתה מהירות המשאית לפני התקלה? (14)

**19.** (4 יח, קיץ תשנ"ז - 97) סירת משוטים יצאה מ- A עם הזרם ל- B. שעה אחריה יצאה בעקבותיה מ- A סירת מנוע, הגיעה לסירת המשוטים וחזרה ל- A. סירת המנוע הגיעה ל- A כאשר סירת המשוטים הגיעה ל- B. מהירות סירת המשוטים היא 16 קמ"ש. מהירות סירת המנוע היא 20 קמ"ש. מהירות הזרם היא 4 קמ"ש. חשב את המרחק בין A ל- B. (14)

השניה הראשונה

00:00:01

תהליך

**18.**  $75 \text{ km/h}$

**16.**  $10 \text{ km/h}$

**19.**  $AB = 270 \text{ km}$

**17.**  $A \rightarrow B: 27 \text{ km/h}$ ,  $B \rightarrow A: 18 \text{ km/h}$

16. (4 יח', חורף תשנ"ג - 92) נתונה מקבילית ABCD. משוואת הצלע AB היא  $7y = x + 26$ .

משוואת הצלע AD היא  $y = x + 2$ . נקודת המפגש של האלכסונים במקבילית היא  $(-3, 2)$ .

א. מצא את אורך האלכסון AC.

ב. מצא את המשוואות של הצלעות BC ו-CD. (47)

17. (4 יח', חורף תשנ"ז - 96) משולש ABE הוא משולש ישר-זווית,  $\angle BAE = 90^\circ$ .

נתון כי השיעורים של שני קדקודים הם  $A(8, 9)$ ,  $B(12, 1)$ , והקדקוד E נמצא על ציר y.

א. מצא את שיעור הקדקוד E.

ב. הראה כי המשולש ABE הוא משולש שווה-שוקיים.

ג. מצא מה צריכים להיות שיעורי נקודה D, כדי שהמרובע ABDE יהיה ריבוע. (48)

18. (4 יח', חורף תשנ"ז - 97) הצלע AD בריבוע ABCD מונחת על הישר  $y = 2x$ .

שיעורי הקדקוד B הם  $(11, 2)$ . מצא את:

א. שיעורי הקדקוד A.

ב. שיעורי הקדקוד D. מצא את שני הפתרונות האפשריים. (48)

19. (4 יח', קיץ תשנ"ז - 97) האלכסון AC במעוין ABCD מונח על הישר  $y = 2x - 8$ .

הצלע AB מונחת על הישר  $y = -8x + 2$ . אלכסוני המעוין נחתכים על ציר x.

מצא את קדקודי המעוין. (49)

20. (4 יח', חורף תשנ"ט - 99)

במשולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) משוואת הבסיס BC היא  $x - 4y = 14$ .

שניים מקדקודי המשולש הם:  $A(-8, 3)$ ,  $B(-10, -6)$ .

א. מצא את משוואת הגובה לבסיס במשולש זה.

ב. חשב את שטח המשולש ABC. (49)

### תשובות

16. א.  $\sqrt{116}$  ב.  $y_{BC} = x + 8$ ,  $y_{CD} = \frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$

17. א.  $E(0, 5)$  ג.  $D(4, -3)$

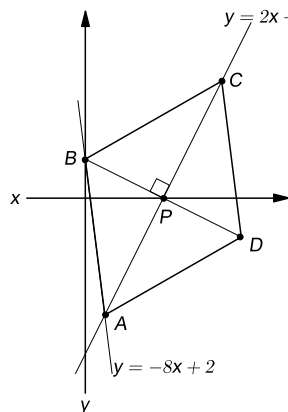
18. א.  $(3, 6)$  ב.  $D(-1, -2)$ ,  $D(7, 14)$  (1)

19.  $A(1, -6)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(7, 6)$ ,  $D(8, -2)$

20. א.  $y = -4x - 29$  ב.  $S = 34$  (י"ר)



19.



A:  $-8x + 2 = 2x - 8 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 8 = -6 \Rightarrow \mathbf{A(1, -6)}$

C:  $AP = PC, y_P = 0 \Rightarrow \frac{-6 + y_C}{2} = 0 \Rightarrow y_C = 6$

$y = 2x - 8 = 6 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \mathbf{C(7, 6)}$

$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4 \Rightarrow \mathbf{P(4, 0)}$

$y_{BC}$ :  $BC \perp AC, m_{AC} = 2 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{2}$

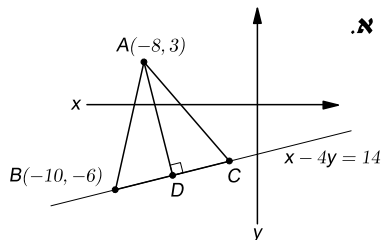
$P(4, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y_{BC} = -\frac{1}{2}x + 2$

B:  $-8x + 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow -16x + 4 = -x + 4 \Rightarrow x = 0$

$y = -8 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow \mathbf{B(0, 2)}$

D:  $BP = PD \Rightarrow \frac{0 + x_D}{2} = 4, \frac{2 + y_D}{2} = 0 \Rightarrow x_D = 8, y_D = -2 \Rightarrow \mathbf{D(8, -2)}$

20.



BC:  $x - 4y = 14 \Rightarrow 4y = x - 14 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

$y_{AD}$ :  $m_{BC} = \frac{1}{4}, BC \perp AD \Rightarrow m_{AD} = -4$

$A(-8, 3) \Rightarrow y - 3 = -4(x + 8) \Rightarrow \mathbf{y = -4x - 29}$

D:  $-4x - 29 = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2} \Rightarrow -16x - 116 = x - 14 \Rightarrow -17x = 102 \Rightarrow x = -6$

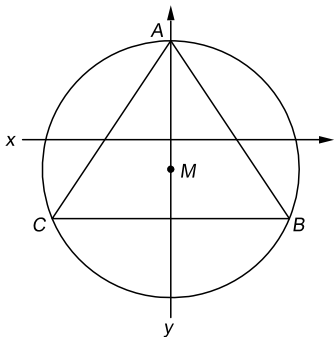
$y = -4 \cdot (-6) - 29 = -5 \Rightarrow \mathbf{D(-6, -5)}$

$AD = \sqrt{(-6 + 8)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(-6 + 10)^2 + (-5 + 6)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{AD \cdot BD}{2} = \sqrt{68} \cdot \sqrt{17} \Rightarrow \mathbf{S_{\triangle ABC} = 34}$  (יחידות ריבועיות)

את המספר הראשוני 7129 ניתן להציג תוך שימוש בכל הספרות פעם אחת בלבד:  $7129 = 5^0 + 6^1 + 7^2 + 8^3 + 9^4$



(79)

27. (803, קיץ תשע"א - 2011, מועד א)

המעגל  $x^2 + (y + 3)^2 = 169$  חותך את החלק החיובי של ציר  $y$  בנקודה  $A$ .

$B$  ו-  $C$  הן נקודות על המעגל,

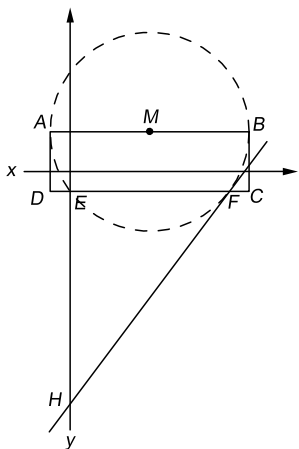
כך ש-  $BC$  מקביל לציר  $x$ .  $C(-12, -8)$ .

א. מצא את שיעורי הנקודות  $A$  ו-  $B$ .

ב. חשב את אורך הקטע  $BC$ .

ג. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .

ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $A$ .



(80)

28. (003, סתיו תשע"ב - 2011, לוחמים)

בציור מלבן  $ABCD$  שצלעותיו מקבילות לצירים.

$A(-1, 2)$ ,  $C(9, -1)$

צלע המלבן  $AB$  היא קוטר במעגל שמרכזו  $M$ .

המעגל חותך את הצלע  $DC$  בנקודות  $E$  ו-  $F$ .

דרך  $F$  העבירו משיק למעגל החותך את ציר  $y$  ב-  $H$ .

א. (1) מצא את שיעורי הנקודות  $B$  ו-  $D$ .

(2) מצא את משוואת המעגל.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודות  $E$  ו-  $F$ .

(2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $F$ .

ג. מצא את שטח המשולש  $EFH$ .

29. (4 יח', קיץ תשמ"ח - 88) קדקודי משולש הם:  $A(8, 5)$ ,  $B(7, -2)$ ,  $C(-1, 2)$ .

א. מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע  $BC$  ואת משוואת האנך האמצעי לצלע  $AC$ .

ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש  $ABC$ .

(81)

תשובות

27. א.  $A(0, 10)$ ,  $B(12, -8)$  ב.  $BC = 24$  (יחידות אורך) ג.  $S_{\Delta} = 216$  (יחידות ריבועיות) ד.  $y = 10$

28. א. (1)  $B(9, 2)$ ,  $D(-1, -1)$  (2)  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

ב. (1)  $E(0, -1)$ ,  $F(8, -1)$  (2)  $y = \frac{4}{3}x - 11\frac{2}{3}$  ג.  $S_{\Delta EFH} = 42\frac{2}{3}$  (יחידות ריבועיות)

29. א.  $y_{AC} = -3x + 14$ ,  $y_{BC} = 2x - 6$  ב.  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

28. א. (1)

$$y_B = y_A = 2, \quad x_B = x_C = 9 \Rightarrow B(9, 2)$$

$$x_D = x_A = -1, \quad y_D = y_C = -1 \Rightarrow D(-1, -1)$$

$$R = MA = MB \Rightarrow x_M = \frac{-1+9}{2} = 4$$

$$y_M = y_B = 2 \Rightarrow M(4, 2)$$

$$R = MB = x_B - x_M = 9 - 4 = 5 \Rightarrow R^2 = 25$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$y_E = y_F = y_C = -1 \Rightarrow (x-4)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 16 \Rightarrow x-4 = \pm 4$$

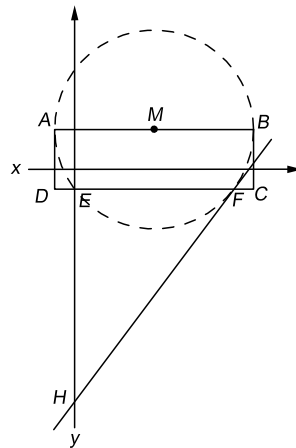
$$x_1 = 8, \quad x_2 = 0, \quad x_F > x_E \Rightarrow E(0, -1), \quad F(8, -1)$$

$$m_{MF} = \frac{2-(-1)}{4-8} = \frac{3}{-4} \Rightarrow m_{FH} = \frac{4}{3}, \quad F(8, -1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{4}{3}(x - 8)$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 11\frac{2}{3}$$

$$y_H = -11\frac{2}{3} \Rightarrow EH = y_E - y_H = -1 - (-11\frac{2}{3}) = 10\frac{2}{3}, \quad EF = x_F - x_E = 8 - 0 = 8$$

$$S_{\triangle EFH} = \frac{EF \cdot EH}{2} = \frac{8 \cdot 10\frac{2}{3}}{2} = 4 \cdot 10\frac{2}{3} \Rightarrow S_{\triangle EFH} = 42\frac{2}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



(2)

ב. (1)

(2)

ג.

Googol - ע נ ק ש ב ע נ ק י ם !!!

הגוגול מוכר בעולם כמנוע חיפוש באינטרנט, ואולם מושג זה מקורו מתמטי.

את גוגול הגדיר מתמטיקאי אמריקאי, Edward Kasner, בשנות הארבעים.

כדי לעניין את אחיינו בן התשע במספרים גדולים.

הגוגול הוא המספר האסטרונומי  $10^{100}$ .

מספר זה חסר משמעות מעשית כלשהי.

עד כמה אין למספר זה משמעות מעשית, נוכח מהדוגמאות הבאות:

שטח כדור הארץ בממ"ר הוא מחצית המספר  $10^{21}$ .

מספר טיפות המים בים התיכון הוא  $10^{24}$ .

מרחק כדור הארץ מהכוכב נוגה במיליונית המילימטר (!) הוא:  $10^{27}$ .

מספר גרגרי החול שכדור הארץ יכול להכיל הוא  $10^{31}$ .

היחס בין אורך קוטר כל היקום המוכר לנו היום לבין אורך הקוטר של גרעין האטום הוא  $10^{42}$ .

משקל כדור הארץ בגרמים הוא  $10^{27}$ .

משקל כל היקום כולו בגרמים הוא  $10^{56}$  !!!

מספר האטומים ביקום כולו מוערך ב-  $10^{80}$ .

לעומת זאת: מספר המצבים בשחמט הוא:  $10^{120}$  !!!

36. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

בחנות ספרים ערכו הגרלת ספרים. כל משתתף בהגרלה מקבל כרטיס שיש בו 16 משבצות, שצבען נחשף על ידי גירוד.

בכל כרטיס יש אותו מספר משבצות אדומות, ושאר המשבצות צבען אחר.

כל משתתף מגרד משבצת אחת ולאחריה עוד אחת.

אם בכל אחד משני הגירודים נחשפת משבצת אדומה, המשתתף זוכה בספר.

ההסתברות שמשתתף יזכה בספר היא  $\frac{1}{20}$ .

א. כמה מבין 16 המשבצות בכרטיס הן אדומות?

ב. בהגרלה השתתפו 11 אנשים.

(1) מהי ההסתברות שלכל היותר 2 משתתפים יזכו בספר?

(2) מהי ההסתברות שבדיוק 2 משתתפים זכו בספר,

אם ידוע כי לכל היותר 2 משתתפים זכו בספר? (123)

37. (005, קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

בשכבה י' בבית ספר מסוים יש שלוש כיתות: י'/1, י'/2, י'/3.

בכל כיתה יש 20 בנים ו-12 בנות.

א. מוציאים באקראי 3 תלמידים מכיתה י'/1 בזה אחר זה. תלמיד שהוצא אינו חוזר לכיתה.

מהי ההסתברות להוציא 3 בנים?

ב. אחרי ששלושת התלמידים שהוצאו חזרו לכיתה שלהם,

הוציאו באקראי תלמיד אחד מכיתה י'/1, תלמיד אחד מכיתה י'/2 ותלמיד אחד מכיתה י'/3.

(1) מהי ההסתברות להוציא לפחות 2 בנים?

(2) ידוע שהוציאו לפחות 2 בנים. מהי ההסתברות שלא כל השלושה שהוצאו היו בנים?

(123)

132 הוא המספר הקטן ביותר השווה לסכום כל המספרים בני שתי ספרות

שניתן להרכיב מספרותיו:  $132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12$

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

### תשובות

36. א. 4 (משבצות אדומות) ב. 1)  $P = 0.9848$  2)  $P = 0.088$

37. א.  $P = \frac{57}{248} = 0.2298$  ב. 1)  $P = \frac{175}{256} = 0.6836$  2)  $P = \frac{9}{14}$

$$P = P(2 + 10) + P(10 + 2) + P(4 + 8) + P(8 + 4) + P(6 + 6) \quad \text{33. א. (1)}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{25} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

$$P = \frac{P(2+10)+P(10+2)}{P(12)} = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{25} : \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5}{25} \Rightarrow P = \frac{2}{5} \quad \text{(2)}$$

ג. ההסתברות המבוקשת: אף לא הוצאה אחת 'נותנת' סכום 12, שזה פשוט:  $(\frac{4}{5})^n$

א: הוצאה אחת בלבד 'נותנת' סכום 12: הפעלת ברנולי על הצלחה אחת:

$$P = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow P = \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

34. נסמן: W(hite) - לבן, R(ed) - אדום, a - כד א, b - כד ב, 1 - פעם ראשונה, 2 - פעם שניה

א.

$$P(W_2) = P(W_{a1} \cap W_{b2}) \cup P(R_{a1} \cap W_{a2}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{20} + \frac{15}{56} \Rightarrow P = \frac{117}{280}$$

ב.

$$P(W_{b2}/W_2) = \frac{P(W_{b2} \cap W_2)}{P(W_2)} = \frac{P(W_{b2})}{P(W_2)} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 10}}{\frac{117}{280}} = \frac{3}{20} : \frac{117}{280} = \frac{3 \cdot 280}{20 \cdot 117} \Rightarrow P = \frac{14}{39}$$

(\*) המאורע: לבן מרב בפעם השניה  $(W_{b2})$  הוא קבוצה חלקית של: לבן בפעם השניה  $(W_2)$ .

לכן הסתברות החיתוך ביניהם היא הסתברות המאורע של הקבוצה החלקית  $P(W_{b2})$ .

ג.

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{14}{39}\right)^3 \cdot \left(\frac{25}{39}\right)^2 \Rightarrow P = 0.1901$$

35. A - שיעור אוהדי קבוצה א', B - שיעור הבנים. נתון:  $P(A) = 0.6$ ,  $P(A/B) = 0.7$ ,  $P(A/\bar{B}) = 0.8$

	A	$\bar{A}$	$\Sigma$
B	(1) 0.42	$0.6 - 0.42 = 0.18$	0.6
$\bar{B}$	(2) 0.32	$0.4 - 0.32 = 0.08$	0.4
$\Sigma$	$0.42 + 0.32 = 0.74$	$1 - 0.74 = 0.26$	1

$$(1) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.6} = 0.7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.42$$

$$(2) P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{0.4} = 0.8 \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.32$$

א. ישירות מהטבלה:

$$P(\bar{A}) = 0.26 = 26\%$$

ב.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.74} \Rightarrow P(B/A) = \frac{21}{37}$$

ג. המאורע שהסתברותו מבוקשת הוא המשלים

של מאורע: 'כל העשרה הינם בנים או בדיוק 9 מהם בנים'

$$\Rightarrow P = 1 - (P_{10}(10) + P_{10}(9)) = 1 - \left(\frac{21}{37}\right)^{10} - \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{21}{37}\right)^9 \cdot \left(\frac{16}{37}\right)^1 \Rightarrow P = 0.9701$$

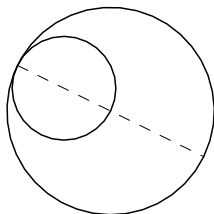


**גאומטריה אוקלידית - א - פרופורציה ללא מעגל**

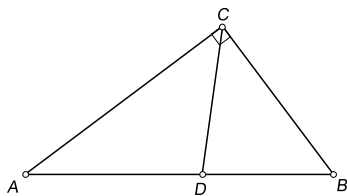
לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה:  $3/4$  - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. את החלוקה הכין שרון חיים.

משולשים	קטעים מיוחדים ונקודות מפגש
- חפיפה	- קטע אמצעים במשולש
7, 8, 16, 19, 24, 25, $4/4$ , $17/5$	6, 15, 27, $5/5$ , $14/5$
- משולש שווה-צלעות	- קטע אמצעים בטרפז
18, 27	18, 23, $6/5$
- משולש $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$	- תיכון ליתר
18	23, 27, $10/4$
- משפט פיתגורס	- מפגש תיכונים במשולש
2, 4, 7, 16, 20, 22, $17/5$	4, 5, 20
<b>מרובעים</b>	<b>שטחים</b>
- דלתון	1, 12, 13, 17, 21, 23, $4/4_{a,b}$
19	<b>פרופורציה</b>
- מקבילית	- משפט חוצה-זווית במשולש
6, 12, 17, 23, 24, $10/4$	4, 9, 10, 22, $3/4$ , $5/5$ , $25/4$
- מלבן	- משפט תאלס
20, $12/4$ , $23/4$	1, 3, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 19, 21, 25, 26, 27, $5/5$ , $23/4$ , $25/4$
- ריבוע	- דמיון
2, 7, 8	1, 2, 6, 7, 9, 11, 12, 17, 20, 21, 22, 24, $3/4$ , $6/5$ , $14/5$ , $17/5$ , $25/4$ , $26/4$
- טרפז	- יחס בין שטחי משולשים דומים
1, 3, 9, 14, 15, 18, 21, 26, $6/5$ , $10/4$	5, 6, 9, $10/4$ , $14/5$ , $25/4$
- טרפז שווה-שוקיים	- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
4, 19, 23, 25, $6/5$	2, 3, 5, 16, $4/4_{a,b}$ , $23/4$
	<b>יחס היקפים במשולשים דומים</b>
	11

**מעגל שמשרטט קו ישר**



בציור מעגל קטן משיק למעגל גדול מבפנים. אורך רדיוס המעגל הגדול גדול פי שניים מאורך רדיוס המעגל הקטן. אם ננעץ כלי כתיבה על המעגל הקטן בנקודת ההשקה, ונסובב אותו לאורך היקף המעגל הגדול מבפנים תוך כדי המשך השקתו לו, המסלול שישרטט כלי הכתיבה יהיה קו ישר!



22. (005, קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנזי)

CD הוא חוצה-זווית ACB

במשולש ישר-זווית ACB ( $\angle ACB = 90^\circ$ )

א. (1) הוכח:  $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$

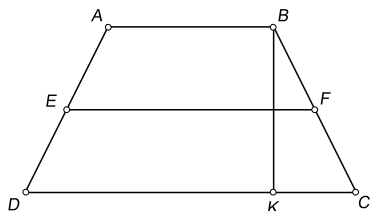
ב. נתון:  $AC = 28\text{cm}$ ,  $BC = 21\text{cm}$ . חשב את אורך הקטע DB.

ג. מקדוד C מורידים אנך ליתר AB.

(150)

האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח:  $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$

ג. חשב את אורך הקטע DN.



23. (005, חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AB \parallel DC$ ),

BK הוא גובה לבסיס DC.

EF הוא קטע אמצעים.

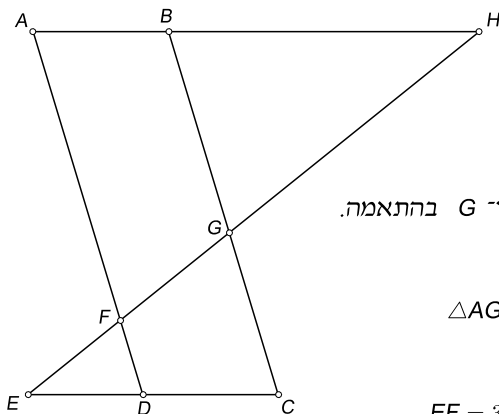
א. הוכח כי המשולש KFC הוא שווה-שוקיים.

ב. הוכח כי המרובע EFKD הוא מקבילית.

ג. נתון:  $DC = 2AB$ .

(151)

חשב את היחס בין שטח המרובע ABFE לבין שטח המרובע EFCD.



24. (806, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

נתונה מקבילית ABCD.

E ו-H הן נקודות על המשכי

הצלעות CD ו-AB בהתאמה.

EH חותך את AD ואת BC בנקודות F ו-G בהתאמה.

נתון:  $ED = EF$ .

א. הוכח: (1)  $HG = HB$  (2)  $\triangle AGH \cong \triangle FBH$

ב. נתון גם:

$EF = 3\text{cm}$ ,  $FD = 2\text{cm}$ ,  $AB = 4\text{cm}$ ,  $BG = 7\text{cm}$

(152)

(1) מצא את האורך של BH. (2) מצא את היחס  $\frac{AF}{GC}$ .

תולדות

$\frac{AF}{GC} = \frac{29}{14}$  (2)

BH = 10.5cm (1) ג. 24

22. א. (2) DB = 15cm ג. DN = 2.4cm

23. ג.  $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{5}{7}$

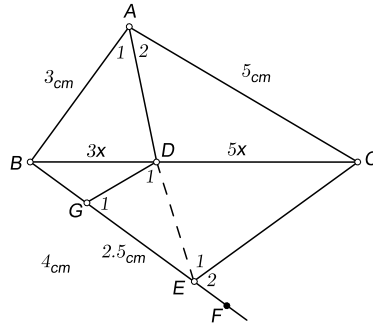
10. א.

$$(1) \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow (2) \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$(3) BD = 3x \Rightarrow DC = 5x$$

$$(1) GD \parallel EC \Rightarrow (4) \frac{BG}{GE} = \frac{BD}{DC} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$(1) BE = 4 \Rightarrow GE = \frac{4}{8} \cdot 5 \Rightarrow GE = 2.5 \text{ cm}$$



ב.

$$\angle G_1 \stackrel{(5)}{=} \angle E_2 \stackrel{(1)}{=} \angle E_1, \angle D_1 \stackrel{(5)}{=} \angle E_1 \Rightarrow \angle G_1 = \angle D_1 \Rightarrow (6) ED = GE (\checkmark)$$

אפשר גם:

$$(1) \angle E_1 = \angle E_2 \Rightarrow (7) \frac{BC}{DC} = \frac{BE}{ED} \Rightarrow \frac{8x}{5x} = \frac{4}{ED} \Rightarrow ED = \frac{4 \cdot 5}{8} = 2.5 \text{ cm}$$

$$(8) GE = 2.5 \text{ cm} \Rightarrow ED = GE (\checkmark)$$

(1) נתון (2) משפט חוצה-זווית במשולש (3) סימון (4) משפט תאלס

(5) זוויות מתאימות או מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי - שוות זו לזו

(6) משולש ששתים מזוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה-שוקיים

(7) משפט חוצה-זווית חיצונית במשולש  $(\triangle BDE)$  (מחוץ לחומר). (8) הוכח בסעיף א

11. א.

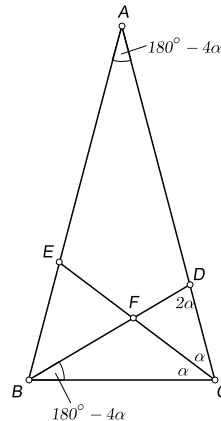
$$(1) \angle BCE = \angle ACE = \alpha \Rightarrow (2) \angle BDC = 2\alpha, \angle ABC = 2\alpha$$

$$\triangle BDC: (3) \angle DBC = 180^\circ - 4\alpha$$

$$\triangle ABC: (3) \angle BAC = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow (4) \triangle AEC \sim \triangle BFC (\checkmark)$$

$$\triangle AEC \sim \triangle BFC \Rightarrow \text{יחס הדמיון} = \frac{AC}{BC} = \frac{4a}{2a} = 2$$

$$\Rightarrow (5) \frac{AE+EC+CA}{BF+FC+CB} = 2$$



ב.

$$\triangle AEC \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{EC}{FC} = 2 \Rightarrow EF = FC (\checkmark)$$

(1) סימון (2) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל-  $180^\circ$  במשולש

(4) משפט דמיון זווית-זווית (5) יחס היקף משולשים דומים שווה ליחס הדמיון

**גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה**

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם כוכביות ניתן לפותרן גם בכלים טריגונומטריים.

שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה:  $3/4$  - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4.

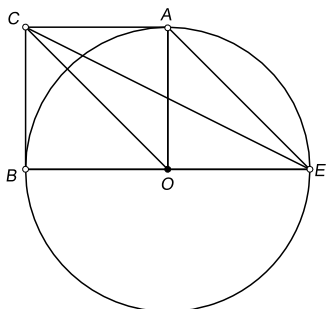
כוכבית מציינת שאלות מעורבות גאומטריה-טריגונומטריה. את החלוקה הכין **שרון חיים**.

מטלות	משולשים
קטעים מיוחדים ונקודות מפגש	חפיפה
- מפגש תיכונים	7, 11, 12, $1/4$ , $3/5$ , $10/5^*$ , $11/5$ , $19/4$ , $21/4$
12	משולש שווה-צלעות
- קטע אמצעים במשולש	1, 5, 9, 13, $5/4$ , $10/5^*$
$5/4$	משולש $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$
- תיכון ליתר	1, 10
6, $17/4$	משפט פיתגורס
שטחים	11, $7/5^*$
$6/4$ , $17/4$	מרובעים
מעגל	דלתון
- משולש חסום במעגל (מעגל חוסם משולש)	2, $6/4$ , $11/5$
5, $3/5$ , $21/4$	מקבילית
- מרובע חסום במעגל (מעגל חוסם מרובע)	9, 13
5, 9, 12, $4/5$ , $5/4$ , $6/4$ , $22/4$ , $26/4$	מעוין
- מעגל חסום במרובע (מרובע חוסם מעגל)	8, $10/5^*$ , $22/4$
8, $5/5^*$ , $11/5$	ריבוע
- שני מעגלים	4
3, 6, $4/5$	טרפז
- קטע מרכזים	$8/5^*$
6	טרפז שווה-שוקיים
	7, $11/5$



**בעיית אתגר**

$PQ$  הוא מיתר במעגל.  $PO = OQ$ .  
 דרך  $O$  עוברים המיתרים  $AB$  ו-  $CD$ .  
 המיתרים  $AD$  ו-  $BC$  חותכים את  $PQ$   
 בנקודות  $E$  ו-  $F$  בהתאמה.  
 הוכח:  $EO = OF$ .  
 הפתרון בכלים אוקלידיים (לא טריגונומטריה!).



4. (אביב ס"ח - 2008, לוחמים)

BE הוא קוטר מעגל שמרכזו O.

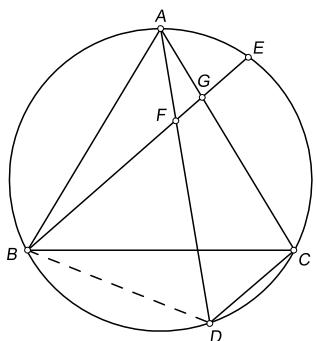
CA ו- CB הם שני משיקים למעגל המאונכים

זה לזה.

הוכח: א. המרובע ACBO הוא ריבוע

ב.  $\angle AEC = \angle OCE$

ג. נתון:  $S_{\triangle ACE} = 32 \text{ cm}^2$ . חשב את רדיוס המעגל. (163)



5. (קיץ תש"ע - 2010, לוחמים)

ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.

D היא נקודה על הקשת  $\widehat{BC}$ , ו- E היא נקודה

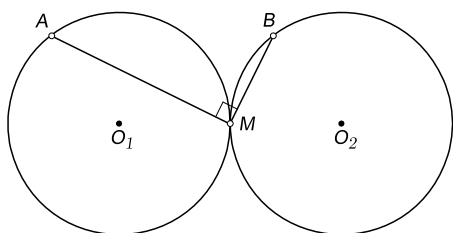
על הקשת  $\widehat{AC}$  כך ש- DC מקביל ל- BE.

BE חותך את AD בנקודה F ואת AC בנקודה G.

א. הוכח:  $\angle ADC = 60^\circ$ .

ב. הוכח: המשולש BFD הוא שווה-צלעות.

ג. הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע BGCD. (163)



6. (806, קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R,

משיקים זה לזה בנקודה M.

מעבירים מיתר MB במעגל שמרכזו  $O_2$ ,

ומיתר MA במעגל שמרכזו  $O_1$ ,

כך ש-  $\angle AMB = 90^\circ$ .

א. (1) נמק מדוע  $\angle O_1MO_2 = 180^\circ$

(2) הוכח:  $AO_1 \parallel BO_2$

ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB.

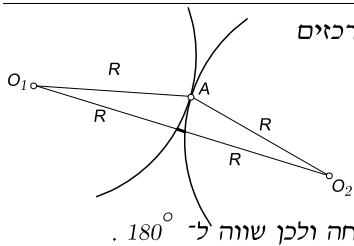
הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק. (164)

הריבוע של 74,162 מורכב מ'זוגות' של ספרות: 5,500,002,244



6. ג. R (יחידות אורך)

4. ג.  $R = 8 \text{ cm}$



6. א. (1) נקודת ההשקה של שני המעגלים נמצאת על קטע המרכזים

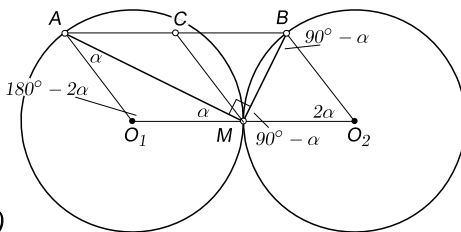
שלהם. שאם לא כן - במשולש  $MO_1O_2$  מתקיים:

$$MO_1 + MO_2 = 2R < O_1O_2$$

סתירה - כי סכום אורכי שתי צלעות במשולש

גדול מאורך הצלע השלישית. מכאן ש-  $\angle O_1MO_2$  שטוחה ולכן שווה ל-  $180^\circ$ .

(2)



$$(1) \angle AMO_1 = \alpha \Rightarrow^{(2)} \angle MAO_1 = \alpha$$

$$(3) \angle AO_1M = 180^\circ - 2\alpha$$

$$(4) \angle BMO_2 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow^{(3)} \angle O_2 = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ \Rightarrow^{(5)} AO_1 \parallel BO_2 \quad (\checkmark)$$

ב.

$$AO_1 = BO_2 = R, \quad AO_1 \parallel BO_2 \Rightarrow^{(6)} AB = O_1O_2 = 2R \Rightarrow^{(7)} MC = R \quad (\text{יחידות אורך})$$

(1) סימון (2) זווית בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל-  $180^\circ$  במשולש

(4) השלמה ל-  $180^\circ$  של זווית שטוחה (5) אם זוויות חד-צדדיות משלימות ל-  $180^\circ$  - הישרים מקבילים

(6)  $ABO_2O_1$  מקבילית (זוג צלעות מקבילות ושוות), צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

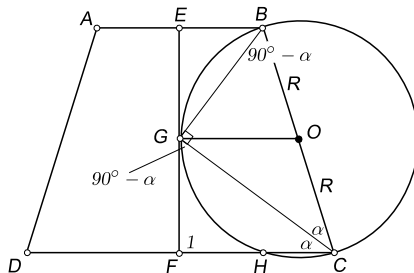
(7) תיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר

7. א.

$$(1) AE = BE, \quad AD = BC, \quad (2) \angle A = \angle B$$

$$(3) \triangle EAD \cong \triangle EBC \Rightarrow^{(4)} ED = EC$$

$$(1) DF = CF \Rightarrow^{(5)} EF \perp DC \quad (\checkmark)$$



ב.

$$(1) OB = OC (= R), \quad (6) OG \perp EF, \quad (7) \angle F_1 = 90^\circ \Rightarrow^{(8)} OG \parallel FC$$

$$(9) GE = GF \Rightarrow^{(10)} GO = \frac{1}{2}(EB + FC) \Rightarrow EB + FC = 2GO \quad (\checkmark)$$

(1) נתון (2) זוויות אותו בסיס בטרפז שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) משפט חפיפה צלע-זווית-צלע

(4) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (5) תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה


(6) זווית ישרה בין משיק-למעגל לבין רדיוס בנקודת ההשקה (7) מסעיף קודם

(8) אם זוויות חד-צדדיות בישרים נחתכים ע"י ישר שלישי משלימות ל-  $180^\circ$  - הישרים מקבילים

(9) ישר המחבר אמצע שוק בטרפז ומקביל לבסיסים - הוא קטע אמצעים בטרפז (EBCF)

**גאומטריה אוקלידית - ג - פרופורציה עם מעגל**

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה:  $3/4$  - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. כוכבית מציינת שאלות מעורבות גאומטריה-טריגונומטריה. את החלוקה הכין שרון חיים.

פרופורציה	משולשים
- משפט חוצה-זווית במשולש 1, 7, 13, 20, 24	- חפיפה 4, 13, 16, 18, 22, $4/4_c$ , $27/4$
- משפט תאלס 22, 26, 27	- משפט חפיפה רביעי 24
- דמיון 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 27, $2/5$ , $7/4$ , $8/4$ , $14/4$ , $15/4$ , $16/5$ , $18/4$ , $20/4$ , $24/4$ , $27/4$	- משולש שווה-צלעות 4
- יחס בין שטחי משולשים דומים 6, 10, 16, $2/5$ , $14/4$ , $15/4$ , $24/4$	- משפט פיתגורס 3, 7, 8, 9, 12, 15, 24, $27/4$ , $14/4$
- יחס בין היקפי משולשים דומים $24/4$	<b>מרובעים</b> - מלבן 9
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע 14, $20/4$	- ריבוע 3, 22
<b>מעגל</b> - משולש חסום במעגל (מעגל חוסם משולש) 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 17, 20, $7/4$	- טרפז 18
- משולש חוסם מעגל (מעגל חסום במשולש) 11	<b>קטעים מיוחדים ונקודות מפגש</b> - קטע אמצעים במשולש 4
- מרובע חסום במעגל (מעגל חוסם מרובע) 14, 16, 18, 22, 25, 26, $4/4_c$ , $15/4$ , $20/4$ , $24/4$	שטחים $4/4$
- מעגל חסום במרובע (מרובע חוסם מעגל) $10/5$	<b>בן כמה אמרת שקוראים לך?</b>
- שני מעגלים 10, 25, $8/4$ , $15/4$ , $27/4$	

**המחסר, המחוסר וההפרש**

$$1980 - 0891 = 1089 \quad , \quad 5823 - 3285 = 2538 \quad , \quad 7641 - 1467 = 6174$$

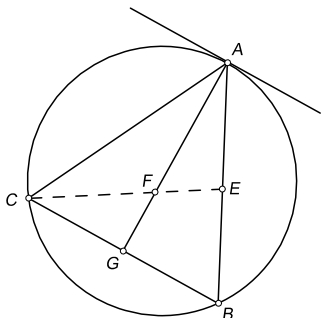
$$3870 - 0783 = 3087 \quad , \quad 2961 - 1692 = 1269 \quad , \quad 9108 - 8019 = 1089$$

המחסר, המחוסר וההפרש מורכבים מאותן ספרות.

אלו כל המספרים בעלי 4 ספרות המקיימים תכונה זו.

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

7. (סתיו ס"ט - 2009, מועד לוחמים)



משולש ABC חסום במעגל.

המשיק למעגל בנקודה A מקביל לצלע BC.

א. הוכח:  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקים.

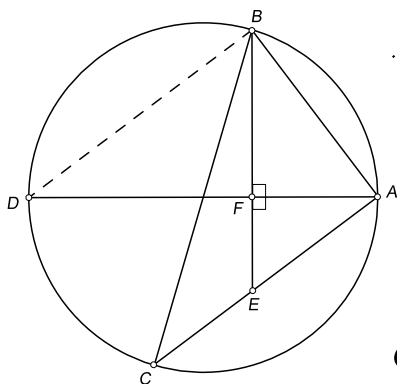
ב. במשולש ABC, הישר AG הוא גובה לצלע BC.

הישר CE הוא חוצה-זווית ACB.

הישרים AG ו-CE נחתכים בנקודה F.

נתון:  $AC = 13\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ . חשב את האורך של FG. (185)

8. (חורף ס"ט - 2009)



משולש ABC חסום במעגל. AD הוא קוטר במעגל זה.

דרך הקדקוד B העבירו אנך ל-AD.

האנך חותך את הקוטר בנקודה F.

ואת הצלע AC בנקודה E.

א. הוכח:  $\triangle AEB \sim \triangle ABC$ .

ב. נתון:  $AF = 3.6\text{cm}$ ,  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ .

מצא את האורך של: AE (1) BE (2). (185)

9. (חורף ס"ט - 2009, מועד מיוחד)

מרובע ABCD הוא מלבן.

הקדקודים של המלבן, B ו-C, נמצאים על המעגל.

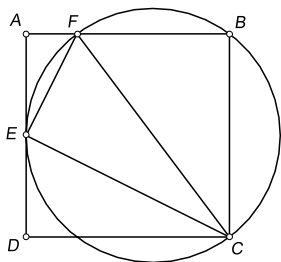
הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E.

והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה F.

א. הוכח כי  $\triangle DCE \sim \triangle ECF$ .

נתון:  $EC = 3.8\text{cm}$ ,  $ED = 1.5\text{cm}$ .

חשב את האורך של: א. AE ב. FC ג. AE. (186)



תשובות

7. ב.  $FG = 3\frac{1}{3}\text{cm}$

8. ב. (1)  $AE = 4.5\text{cm}$  (2)  $BE = 7.5\text{cm}$

9. ב.  $FC = 4.14\text{cm}$  ג.  $AE = 1.5\text{cm}$



(1)  $\angle B = \angle D = 90^\circ \Rightarrow (2) FC = 2R \Rightarrow (3) \angle FEC = 90^\circ$

(4)  $\angle DEC = \angle EFC \Rightarrow (5) \triangle DCE \sim \triangle ECF (\checkmark)$

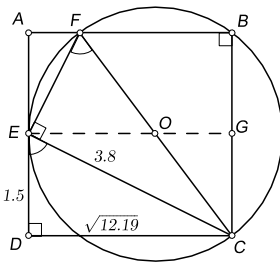
$\triangle EDC$ : (6)  $DC = \sqrt{3.8^2 - 1.5^2} = \sqrt{12.19}$

$\triangle DCE \sim \triangle ECF \Rightarrow (7) \frac{DC}{EC} = \frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{\sqrt{12.19}}{3.8} = \frac{3.8}{CF}$

$\Rightarrow CF = \frac{3.8^2}{\sqrt{12.19}} \Rightarrow CF = 4.14 \text{cm}$

(8)  $\angle OED = 90^\circ \Rightarrow (9) \angle OGC = 90^\circ$  .ג. ב"ע: הישר EOG (O - מרכז המעגל).

(10)  $CG = GB \Rightarrow (11) ED = CG = GB = AE \Rightarrow AE = 1.5 \text{cm}$



9. א.

ב.

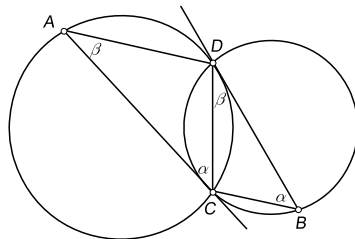
- (1) זוויות מלבן ישרות (2) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר (3) זווית היקפית הנשענת על קוטר - ישרה (4) זווית בין מיתר למשיק שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני (5) משפט דמיון זווית-זווית (6) משפט פיתגורס (7) יחס הדמיון (8) זווית בין רדיוס למשיק - ישרה (9) השלמה ל- $360^\circ$  במרובע EGCD (10) קטע ממרכז מעגל המאונך למיתר - חוצה את המיתר (11) ABGE ו-EDCG מלבנים

(1)  $\angle ACD = \angle CBD = (2) \alpha$  , (1)  $\angle CDB = \angle CAD = (2) \beta$

$\triangle BCD$ : (3)  $\angle BCD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$\triangle ADC$ : (3)  $\angle ADC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \angle BCD = \angle ADC \Rightarrow (4) AD \parallel BC (\checkmark)$

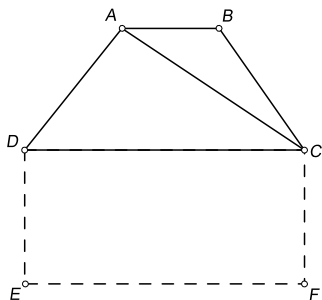


ב.

(5)  $\triangle ADC \sim \triangle DCB \Rightarrow (6) \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{CB} \Rightarrow \frac{9}{DC} = \frac{DC}{4} \Rightarrow DC^2 = 36 \Rightarrow CD = 6 \text{cm}$

$\frac{AD}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow (7) S_{\triangle ADC} : S_{\triangle DCB} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{\triangle ADC} : S_{\triangle DCB} = 2\frac{1}{4}$

- (1) זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר (2) סימון (3) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש (4) שני ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי, זוג זוויות מתאימות שוות זל"ז - שני הישרים מקבילים זל"ז (5) משפט דמיון זווית-זווית (6) יחס הדמיון (7) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון



11. (חורף ס"ט - 2009, לוחמים)

בציור שלפניך AC הוא אלכסון בטרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ).

$AB = 8\text{cm}$ ,  $BC = 12\text{cm}$ ,  $DC = 23\text{cm}$ ,  $\angle BCD = 57^\circ$ .

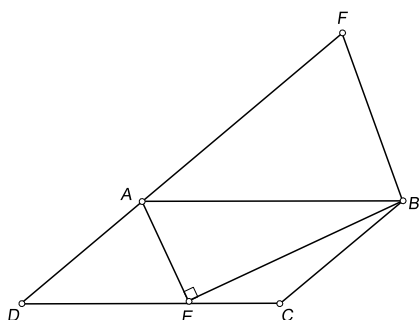
א. חשב את אורך האלכסון AC של הטרפז.

ב. חשב את גודל הזווית  $\angle ACD$ .

ג. על הצלע CD של הטרפז בנו מלבן CDEF

ששטחו 253 סמ"ר.

חשב את אורך הקטע AF. (211)



12. (קיץ ס"ט - 2009, מועד א)

במקבילית ABCD נתון: נקודה E נמצאת

על הצלע DC כך ש-  $\angle AEB = 90^\circ$ .

נקודה F נמצאת על המשך הצלע AD.

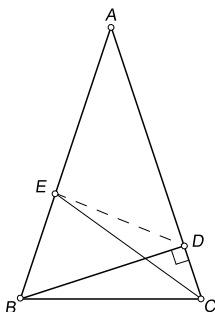
נתון:  $AD = 10\text{cm}$ ,  $\angle ABE = 25^\circ$

$\angle DFB = 70^\circ$ ,  $\angle ADC = \alpha$

א. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את אורך הקטע AE.

(2) הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המשולש ABF.

ב. נתון גם כי  $AF = AB$ . חשב את שטח המקבילית ABCD (ערך מספרי). (212)



13. (קיץ ס"ט - 2009, מועד ב) במשולש שווה-שוקיים ABC נתון:

$AB = AC = 10\text{cm}$ ,  $\angle ACB = \beta$

BD הוא גובה לשוק, ו- CE חוצה את הזווית  $\angle ACB$ .

א. הבע באמצעות  $\beta$  את האורך של הקטע AE.

ב. הבע באמצעות  $\beta$  את שטח המשולש AED.

ג. נתון גם  $\angle DBC = \frac{\beta}{4}$ .

חשב את שטח המשולש AED (ערך מספרי). (213)

תשובות

11. א.  $AC = 17.68\text{cm}$     ב.  $\angle ACD = 34.7^\circ$     ג.  $AF = 25.59\text{cm}$

12. א. (1)  $AE = 11.03 \sin \alpha \text{ cm}$     (2)  $S_{\Delta} = 362.53 \sin^3 \alpha \sin(110^\circ - \alpha) \text{ cm}^2$     ב.  $S_{ABCD} = 107.9 \text{ cm}^2$

13. א.  $AE = \frac{10 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2} \text{ cm}}$     ב.  $S_{\Delta AED} = -\frac{50 \sin \frac{\beta}{2} \cos 2\beta \sin 2\beta}{\sin \frac{3\beta}{2} \text{ cm}^2}$     ג.  $S_{\Delta AED} = 14.69 \text{ cm}^2$

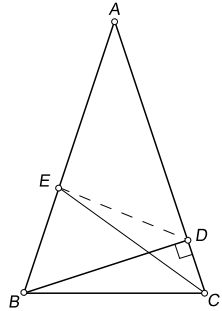
$\triangle AEC$ : (1, 2)  $\angle A = 180^\circ - 2\beta$ , (3)  $\angle ACE = \frac{\beta}{2} \Rightarrow$  (2)  $\angle AEC = \frac{3\beta}{2}$  **13. א.**

$$(4) \frac{AE}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{10}{\sin \frac{3\beta}{2}} \Rightarrow AE = \frac{10 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}} \text{ cm}$$

$\triangle ADB$ :  $\frac{AD}{10} = \cos (180^\circ - 2\beta) \stackrel{(5)}{=} -\cos 2\beta \Rightarrow AD = -10 \cos 2\beta$

$$S_{\triangle AED} \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \cdot \sin (180^\circ - 2\beta) \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}} \cdot (-10 \cos 2\beta) \cdot \sin 2\beta$$

$$S_{\triangle AED} = -\frac{50 \sin \frac{\beta}{2} \cos 2\beta \sin 2\beta}{\sin \frac{3\beta}{2}} \text{ cm}^2$$



**ג.**

$$(2) \angle DBC = 90^\circ - \beta = \frac{\beta}{4} \Rightarrow \frac{5\beta}{4} = 90^\circ \Rightarrow \beta = \frac{90^\circ \cdot 4}{5} = 72^\circ$$

$$S_{\triangle AED} = -\frac{50 \sin \frac{\beta}{2} \cos 2\beta \sin 2\beta}{\sin \frac{3\beta}{2}} = -\frac{50 \sin 36^\circ \cos 144^\circ \sin 144^\circ}{\sin 108^\circ} \Rightarrow S_{\triangle AED} = 14.69 \text{ cm}^2$$

(1) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (2) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש (3) נתון

(4) משפט הסינוסים (5) זהות:  $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  (6) נוסחת שטח משולש

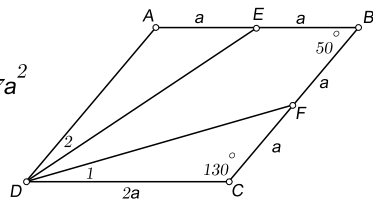
(7) זהות:  $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

**14. א.**

$\triangle DCF$ : (1)  $CF = a$ ,  $DC = 2a$ , (2)  $\angle C = 130^\circ$

$$(3) DF^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 130^\circ = 5a^2 + 2.57a^2$$

$$DF^2 = 7.57a^2 \Rightarrow DF = 2.75a \text{ (יחידות אורך)}$$



**ב.**

$\triangle DCF$ : (4)  $\frac{CF}{\sin \angle D_1} = \frac{DF}{\sin 130^\circ} \Rightarrow \sin \angle D_1 = \frac{a \sin 130^\circ}{2.75a} = 0.2784 \Rightarrow \angle D_1 = 16.16^\circ$

$$(5) \angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow \angle EDF = 50^\circ - 2 \cdot 16.16^\circ \Rightarrow \angle EDF = 17.67^\circ$$

$$2a = 4 \text{ cm} \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

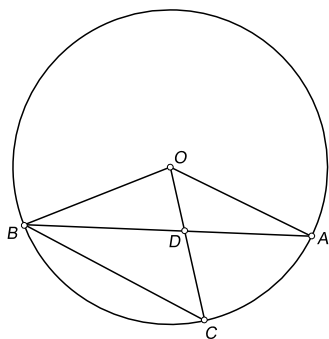
**ג.**

$$S_{EBFD} = S_{ABCD} - 2 S_{\triangle DCF} = 2a \cdot 2a \cdot \sin 50^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \sin 130^\circ$$

$$S_{EBFD} = 16 \cdot \sin 50^\circ - 8 \sin 130^\circ \Rightarrow S_{EBFD} = 6.13 \text{ cm}^2$$

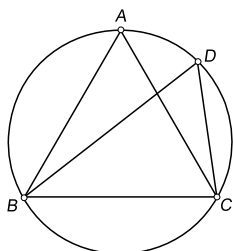
(1) נתון (2) השלמה ל- $180^\circ$  של זוויות חד-צדדיות במקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי

(3) משפט הקוסינוסים (4) משפט הסינוסים (5)  $\triangle EAD \cong \triangle FCD$  (צלע-זווית-צלע)



5. (קיץ ס"ח - 2008, מועד א) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. OC ו-AB נחתכים בנקודה D. נתון:  $\angle OAD = \beta$ ,  $\angle AOD = \alpha$ ,  $OB = R$

- א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס:  $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}}$ .
- ב. נתון גם:  $\alpha = \beta$  וכן:  $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{2}{3}$ . מצא את הזווית  $\alpha$ . (230)



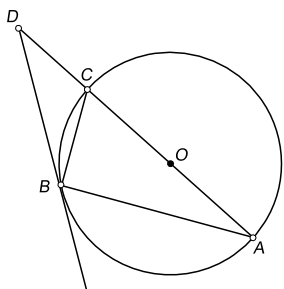
6. (קיץ ס"ח - 2008, מועד לוחמים) ABC הוא משולש שווה-שוקים ( $AB = AC$ ) החסום במעגל. D היא נקודה על הקשת AC.

נתון:  $DC = 5\text{cm}$ ,  $AB = 7\text{cm}$ ,  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{49}{40}$ .

כל הזוויות בשני המשולשים הן זוויות חדות.

א. חשב את האורך של הצלע BD.

ב. חשב את זוויות המשולש BDC, אם נתון כי שטח המשולש BDC הוא  $10\sqrt{3}$  י"ר. (230)



7. (סתיו תש"ע - 2009, מועד לוחמים)

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R. AC הוא קוטר במעגל. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הקוטר AC בנקודה D. נתון:  $\angle BAC = \alpha$ .

א. (1) בטא באמצעות  $\alpha$  את זוויות המשולש BDC.

(2) בטא באמצעות R ו- $\alpha$  את האורך של שתי הצלעות הקצרות במשולש BDC.

ב. נתון גם כי המשולש CBD הוא שווה-שוקיים. מצא את  $\alpha$ . (231)

### סכום מינימלי של מרחקים

מהי הנקודה במרובע קמור שסכום מרחקיה מכל אחד מקדקודי המרובע הוא מינימלי? תשובה (בצופן א"ת ב"ש): יורב תכפטמ ציגפשו (צפלוס!)

### תהלות

5. א.  $\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$  ב.  $\alpha = 41.41^\circ$

6. א.  $BD = 8\text{cm}$  ב.  $\angle C = 81.79^\circ$ ,  $\angle D = 60^\circ$ ,  $\angle B = 38.21^\circ$

7. א. (1)  $\angle D = 90^\circ - 2\alpha$ ,  $\angle C = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle B = \alpha$  (2)  $BC = 2R \sin \alpha$ ,  $CD = \frac{2R \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$  ב.  $\alpha = 30^\circ$

5. א.

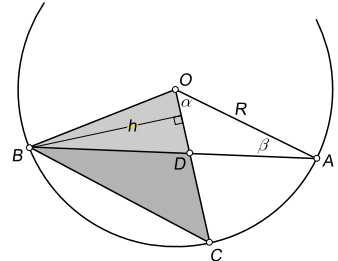
הצלעות OD ו-OC במשולשים BOD ו-BOC נמצאות על ישר אחד.  
 הקודקוד מולן (B) משותף. לכן הגובה לאותן צלעות משותף.  
 לכן היחס בין שטחיהם שווה ליחס הצלעות המתאימות:  $\frac{OD}{OC}$ .

$\triangle DAO$ : (1)  $\angle D = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

(2)  $\frac{OD}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin (180^\circ - (\alpha + \beta))} \stackrel{(3)}{=} \frac{R}{\sin (\alpha + \beta)}$

$\Rightarrow OD = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$

$\frac{OD}{OC} = \frac{\frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}}{R} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$



ב.

$\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{2}{3}$ ,  $\alpha = \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2}{3}$

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$

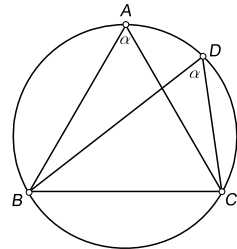
(4)  $\frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} \cdot 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 41.41^\circ$

(1) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש (2) משפט הסינוסים

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  (4)  $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  (3)

(1)  $\angle A = \angle D \stackrel{(2)}{=} \alpha$ , (3)  $AB = AC = 7\text{cm}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{\frac{7 \cdot 7 \cdot \sin \alpha}{2}}{\frac{5 \cdot BD \cdot \sin \alpha}{2}} = \frac{49}{40} \Rightarrow \frac{49}{5 \cdot BD} = \frac{49}{40} \Rightarrow BD = 8\text{cm}$



6. א.

ב.

$S_{\triangle BDC} = \frac{8 \cdot 5 \cdot \sin \alpha}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \stackrel{(3)}{\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ} \Rightarrow \stackrel{(4)}{AB = AC = BC = 7\text{cm}}$

$\triangle BDC$ : (5)  $\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin \angle B} \Rightarrow \sin \angle B = 0.6186 \Rightarrow \angle B = 38.21^\circ$  (נתון: הזוויות חדות)

$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 38.21^\circ = 81.79^\circ \rightarrow \angle B = 38.21^\circ, \angle D = 60^\circ, \angle C = 81.79^\circ$

(1) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת - שוות זו לזו (2) סימון

(3) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו ( $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ )

(4) משולש שזוויותיו הן  $60^\circ$  הוא משולש שווה-צלעות (5) משפט הסינוסים

14. (קיץ תשע"א - 2011, מועד א) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} + a$ ,  $a > 0$ . פרמטר.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא (הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך):

(1) את האסימפטוטה של גרף הפונקציה המקבילה לציר  $x$ .

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. (1) האם נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת מעל האסימפטוטה או מתחתיה? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (256)

15. (קיץ תשע"א - 2011, לוחמים) נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^2-3}{(x+1)^2}$ .

א. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה, המקבילות לצירים.

(3) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(4) נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

(5) תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נסמן ב- $A$  את נקודת החיתוך של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה עם גרף הפונקציה.

נסמן ב- $C$  את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר  $y$ . (257)

הראה כי הישר העובר דרך הנקודות  $A$  ו- $C$  משיק לגרף הפונקציה בנקודה  $A$ .

### הפרדוקסים של זנון - למה אכילס לא ישיג את הצב

זנון, פילוסוף יווני, 435-495 לפנה"ס, נהג להציג פרדוקסים מתמטיים רבים.

אחד מהמפורסמים שבהם הוא זה: אכילס והצב עורכים ביניהם תחרות ריצה. אכילס נותן לצב מקדמה של 100 מ'.

אכילס מהיר מהצב פי 10. התחרות מתחילה. כשאכילס עובר 100 מ', הצב משיג אותו ב-10 מ'. כשאכילס עובר את

אותם 10 מ', הצב משיג אותו במטר. כשאכילס עובר את המטר, משיג אותו הצב ב-10 ס"מ וכך הלאה עד אינסוף.

יוצא מכאן, שכל פעם שאכילס ידביק את הפער שבינו לבין הצב - הצב ישיג אותו בעשירית הפער האחרון שהיה

ביניהם. אם כך אכילס לא יצליח להשיג את הצב לעולם...

מצד שני ברור שהוא ישיג אותו.

נו, טוב, לכן זה פרדוקס... (בסוף אכילס מת, בלי קשר לצב).

### תשובות

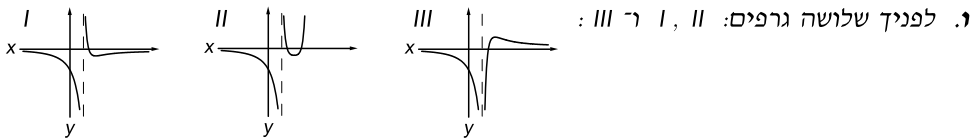
14. א.  $\forall x$  ב. (1)  $y = a + 1$  (2)  $(0, a)$  (3)  $\min(0, a)$  ג. (1) מתחת לאסימפטוטה

15. א. (1)  $x \neq -1$  (2)  $x = -1, y = 1$  (3)  $(\pm\sqrt{3}, 0), (0, -3)$  (4)  $\max(-3, 1\frac{1}{2})$

(5)  $\nearrow: (x < -3) \cup (x > 1), \searrow: -3 < x < -1$

16. (חורף תשע"ב - 2011) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x-2}{(2x-2)^2}$

- מצא את: א. תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
 ג. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.  
 ד. השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).  
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ? נמק. (258)

17. (חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^2}{x^2+a} - \frac{1}{2}$ ,  $a \neq 0$  פרמטר. הפונקציה אינה מוגדרת עבור  $x = 1$ .  
 א. מצא את הערך של  $a$ . נמק.



הצב  $a = -1$ , וענה על הסעיפים הבאים:

- ב. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 (2) האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים.  
 (3) נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.  
 (4) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ד. רשום את תחום הערכים של  $x$ , שבו  $y$  חיובי וגם  $y'$  חיובי. (259)

**גוגל ראשוני**

**6006LE**

אם תהפכו את הכיתוב של גוגל שבציור, תקבלו את המספר הראשוני: 379,009.

(Prime curios)

**תהלות**

16. א.  $x \neq 1$  ב.  $(0, -\frac{1}{2}), (2, 0)$  ג.  $x = 1, y = 0$  ד.  $\max(3, \frac{1}{16})$  ו. 1
17. א.  $a = -1$  ב.  $x \neq \pm 1$  (1)  $x = \pm 1, y = \frac{1}{2}$  (2)  $\max(0, -\frac{1}{2})$  (3)  $x < -1$  ד.  $\angle: (x < -1) \cup (-1 < x < 0)$ ,  $\searrow: (0 < x < 1) \cup (x > 1)$  (4) ב.

18. (קיץ תשע"ג - 2013, מועד א)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{x^2 - x}$ . פרמטר  $a > 0$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$ , המאונכות לציר  $x$ .

ג. הראה שלגרף הפונקציה  $f(x)$  אין נקודת חיתוך עם ציר  $x$ .

ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה (הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך).

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ו. הישר  $y = 2x - 9$  עובר דרך נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

(1) האם הישר משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת הקיצון? נמק.

(260)

(2) מצא את ערכו של  $a$ .

**כיצד מציירים ביצה?**

על מערכת צירים חגים מעגל שמרכזו  $O$  וקוטרו  $AB$ .  
 $C$  היא נקודת חיתוך המעגל עם ציר  $y$ .  
 מעבירים ישר דרך  $B$  ו- $C$  ועוד ישר דרך  $A$  ו- $C$ .  
 חגים קשת מעגל  $\widehat{DB}$  שמרכזו  $A$  ומחוגו  $AB$ .  
 חגים קשת מעגל  $\widehat{AE}$  שמרכזו  $B$  ומחוגו  $BA$ .  
 $D$  ו- $E$  הן נקודות חיתוך של המשך הישרים  $AC$  ו- $BC$  עם הקשתות.  
 חגים קשת מעגל  $\widehat{ED}$  שמרכזו  $C$  וחוגו  $CE$ .  
 זהו. בתיאבון.



חשבון דיפרנציאלי - פונקציות רציונאליות - פתרונות

**א. 1.**  $f(x) = -\frac{1}{x^2 - 4x + m}$

$x = 1 \Rightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 + m = 0 \Rightarrow m = 3$

**ב.**

$y = -\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ ,  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$   
 $\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow x = 3$

**ג.**

$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = -\frac{1}{\infty(1-0+0)} = -\frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$

$f'(x) = (-\frac{1}{x^2 - 4x + 3})' = -(-\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}) = \frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 2$

$(2x-4)' = 2 \Rightarrow f''(2) > 0 \Rightarrow x_{\min} = 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2^2 - 4 \cdot 2 + 3} = -\frac{1}{-1} = 1 \Rightarrow \min(2, 1)$

**א. 2.**  $g(x) = \frac{x^2 - k}{x + 5}$ ,  $g'(-2) = -\frac{7}{9}$ ;  $k = ?$

$g'(x) = \frac{2x(x+5) - 1 \cdot (x^2 - k)}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + k}{(x+5)^2}$

$g'(-2) = \frac{4 - 20 + k}{3^2} = \frac{k - 16}{9} = -\frac{7}{9} \Rightarrow k = -7 + 16 \Rightarrow k = 9$

**ב. (1)**

$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 5} \Rightarrow x \neq -5$

**(2)**

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{5} \Rightarrow (0, -1\frac{4}{5})$ ;  $y = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow (\pm 3, 0)$

**(3)**

$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 9}{x + 5} = \frac{16}{0} = \infty \Rightarrow$  **אסימפטוטה אנכית**  $x = -5$

**(4)**

$g'(x) = \frac{x^2 + 10x + k}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + 9}{(x+5)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = -5 \pm 4$

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -9$

מכנה הנגזרת הראשונה חיובי. לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

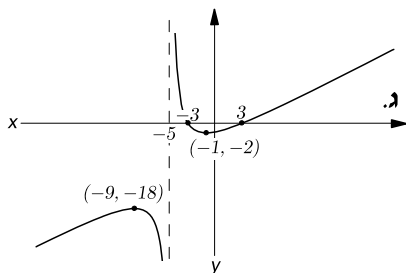
$(x^2 + 10x + 9)' = 2x + 10$

$2 \cdot (-1) + 10 > 0 \Rightarrow g''(-1) > 0 \Rightarrow x_{\min} = -1$

$2 \cdot (-9) + 10 < 0 \Rightarrow g''(-9) < 0 \Rightarrow x_{\max} = -9$

$g(-1) = \frac{1-9}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \Rightarrow \min : (-1, -2)$

$g(-9) = \frac{81-9}{-4} = \frac{72}{-4} = -18 \Rightarrow \max : (-9, -18)$



2. א.  $y = \frac{1}{x^2 - Ax}$ ,  $y'(1) = \frac{2}{9}$ ;  $A = ?$

$y' = -\frac{1}{(x^2 - Ax)^2} \cdot (2x - A) \Rightarrow y'(1) = -\frac{2-A}{(1-A)^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow 9A - 18 = 2 - 4A + 2A^2$

$2A^2 - 13A + 20 = 0 \Rightarrow A_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow A_1 = 4, A_2 = 2\frac{1}{2}$

ב.

$y = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow x(x - 4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq 4$

ג.

$y' = -\frac{1}{(x^2 - 4x)^2} \cdot (2x - 4) = \frac{4 - 2x}{(x^2 - 4x)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$

המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי בנקודה החשודה,

לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

$(4 - 2x)' = -2 \Rightarrow y''(2) < 0 \Rightarrow x_{\max} = 2$

$y(2) = \frac{1}{2^2 - 4 \cdot 2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \max(2, -\frac{1}{4})$

ד.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$  א.ס.  $x = 0$  אנכית

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$  א.ס.  $x = 4$  אנכית

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2(1 - \frac{4}{x})} = \frac{1}{\infty(1-0)} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$  א.ס.  $y = 0$  אופקית

ה.

x		0		2		4	
y'	$\frac{+}{+} = +$	$\emptyset$	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	$\emptyset$	$\frac{-}{+} = -$
y	$\nearrow$	asym.	$\nearrow$	max	$\searrow$	asym.	$\searrow$

$\Rightarrow \nearrow: (x < 0) \cup (0 < x < 2)$ ,  $\searrow: (2 < x < 4) \cup (4 < x)$

**ג'ון וואליס** (John Wallis 1616-1703) היה אחד המתמטיקאים המוכשרים והמקוריים ביותר של המאה ה-17.

הוא הראשון שהשתמש בסימון ' $\infty$ ' לציון אינסוף.

הוא היה מסוגל למצוא בעל פה את החלק השלם של השורש הריבועי של  $3 \cdot 10^4$  או של מספר בעל 53 ספרות!

חודש ימים לאחר שחישב את המספר, הוא היה מסוגל להכתיב אותו ללא שגיאה.

בנוסף לכך, היתה לו יכולת בלתי רגילה לפענח צפנים.

הוא הצליח לפענח מסרים מקודדים לטובת חברי הפרלמנט שהתנגדו למלך צ'רלס הראשון בתקופת מלחמת

האזרחים באנגליה (1642-1649).

קיזור תולדות המתמטיקה - פרופסור **בנו ארבל**

$$y = 1 + \frac{Ax^2}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Ax^2}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Ax^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}\right) = 1 + \frac{A}{1-0} = 1 + A = 4 \Rightarrow A = 3$$

ג. (1)

$$y = 1 + \frac{3x^2}{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{0}{-4} = 1 + 0 \Rightarrow (0, 1)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4 + 3x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, 0)$$

(3)

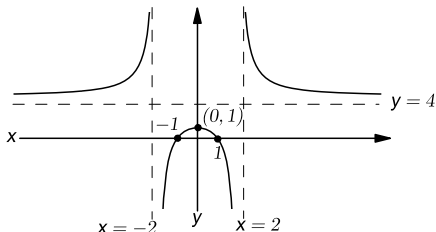
$$\lim_{x \rightarrow \pm 2} \left(1 + \frac{3x^2}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm 2} \left(1 + \frac{12}{0}\right) = 1 + \infty = \infty \Rightarrow x = \pm 2$$

(4)

$$y' = 0 + \frac{6x(x^2 - 4) - 2x \cdot 3x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-24x}{(x^2 - 4)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

x		-2		0		2	
f'	$\frac{-}{+} = +$	$\emptyset$	$\frac{-}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	$\emptyset$	$\frac{-}{+} = -$
f	$\nearrow$	asym.	$\nearrow$	max	$\searrow$	asym.	$\searrow$

$\Rightarrow \max(0, 1)$



ג.

### הוכחה מהספר'

המתמטיקאי היהודי-הונגרי פאול ארדש (Paul Erdos, 1913-1996) טען שלבורא העולם יש ספר שבו הוא שומר את כל ההוכחות המתמטיות היפות ביותר, האלגנטיות ביותר וגם את כל התשובות לשאלות במתמטיקה שעדיין פתוחות, שטרם נמצא להן מענה. כשהוא היה רוצה להחמיא להוכחה שהיא יפה, הוא היה אומר שזו הוכחה מהספר'.  
דוגמה:

משפט: כל בחירה של  $k + 1$  מספרים מבין  $2k$  מספרים טבעיים עוקבים, תכיל שני מספרים זרים זה לזה.  
הוכחה: שני מספרים טבעיים עוקבים - זרים זה לזה (השלם את ההוכחה, זה מאוד פשוט).

כדי לבחור  $k$  מספרים זרים מתוך  $2k$  המספרים העוקבים, יש לבחור את  $k$  המספרים במקומות הווגיים, או את  $k$  המספרים במקומות הלא-ווגיים.

לכן: אם בוחרים  $k + 1$  מספרים, בהכרח שניים מהם עוקבים, ולכן הם זרים. מה שהיה להוכיח.

5. א. נתון:  $y = \frac{x^2}{a-x}$ ,  $y'(6) = 0$

$$y' = \frac{2x(a-x) + x^2}{(a-x)^2}$$

$$y'(6) = \frac{12(a-6) + 36}{(a-6)^2} = \frac{12a-36}{(a-6)^2} = \frac{12(a-3)}{(a-6)^2} = 0 \Rightarrow 12(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3$$

ב. 1.

$$y = \frac{x^2}{3-x} \Rightarrow x \neq 3$$

2.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

3.

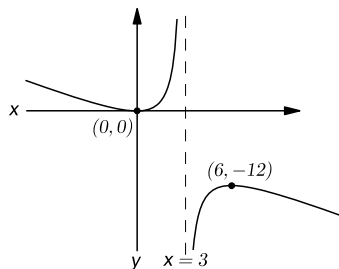
$$y' = \frac{2x(3-x) + x^2}{(3-x)^2} = \frac{x(2(3-x) + x)}{(3-x)^2} = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$$

x		0		3		6	
y'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$	$\emptyset$	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	asym.	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y(6) = \frac{36}{3-6} = -12 \Rightarrow (0, 0) \text{ min } (6, -12) \text{ max}$$

4.

$$x = 3 \Rightarrow y = \frac{9}{0} = \infty \Rightarrow x = 3$$



ג.

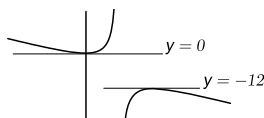
ד. הישר  $y = k$  הוא קו אופקי.

בהנחיות משרד החינוך: משיק נקרא גם 'חותך'.

לישר ולפונקציה יש נקודה משותפת אחת בלבד כאשר הישר משיק לגרף הפונקציה,

בנתוני השאלה:

ישר אופקי משיק לגרף הפונקציה בנקודות שבהן  $y' = 0$ :  $(0, 0)$  ו- $(6, -12)$ .



$$k_1 = 0, k_2 = -12 \Leftarrow$$

$$f(x) = \frac{5+2x}{4-x^2}$$

$$(1) \quad 4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

$$(2) \quad x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow (0, 1\frac{1}{4})$$

$$y = 0 \Rightarrow 5 + 2x = 0 \Rightarrow x = -2\frac{1}{2} \Rightarrow (-2\frac{1}{2}, 0)$$

$$(3) \quad x = 2 \Rightarrow y = \frac{9}{0} = \infty \Rightarrow x = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow x = -2$$

$$x = \infty \Rightarrow y = \frac{5+2x}{4-x^2} = \frac{x(\frac{5}{x} + 2)}{x^2(\frac{4}{x^2} - 1)} = \frac{\frac{5}{x} + 2}{x(\frac{4}{x^2} - 1)} = \frac{0+2}{\infty(0-1)} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(4) \quad f'(x) = \frac{2(4-x^2) - (-2x)(5+2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+10x+4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{2x^2+10x+8}{(4-x^2)^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$2x^2 + 10x + 8 = 0 \quad / : 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -4$$

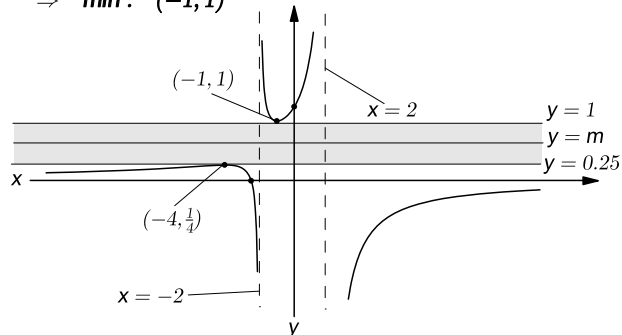
סימן ( $\pm$ ) הנגזרת השניה בנקודות החשודות שווה לסימן הנגזרת של מונה הנגזרת הראשונה באותן נקודות, כי: סימן המכנה של הנגזרת הראשונה בהן הוא חיובי. ניתן להתעלם גם מהגורם המשותף 2 כי הוא אינו משפיע על הסימן:

$$(x^2 + 5x + 4)' = 2x + 5, \quad 2 \cdot (-4) + 5 < 0 \Rightarrow f''(-4) < 0 \Rightarrow x_{\max} = -4$$

$$2 \cdot (-1) + 5 > 0 \Rightarrow f''(-1) > 0 \Rightarrow x_{\min} = -1$$

$$f(-4) = \frac{5-8}{4-16} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4} \Rightarrow \max: (-4, \frac{1}{4})$$

$$f(-1) = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \min: (-1, 1)$$



ג. ראה ציור  $\frac{1}{4} < m < 1 \Leftrightarrow$

13. א. (1)

$$f(x) = \frac{ax}{x+a}, \quad x+a \neq 0 \Rightarrow x \neq -a$$

(2)

$$f'(x) = \frac{a(x+a) - 1 \cdot ax}{(x+a)^2} = \frac{ax+a^2-ax}{(x+a)^2} = \frac{a^2}{(x+a)^2} = \frac{+}{+} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (\checkmark)$$

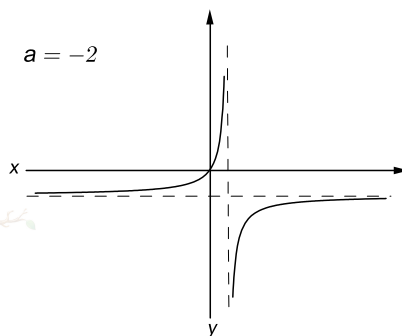
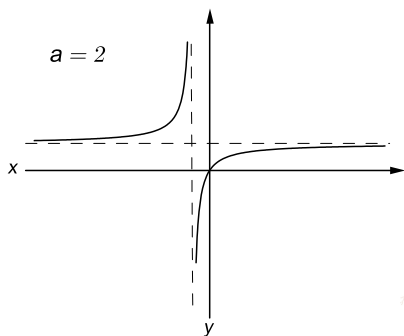
(3)

$$\frac{ax}{x+a} = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{ax}{x+a} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{-a^2}{0} = \infty \Rightarrow x = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{a+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x(\frac{a}{x} + 1)} = \frac{a}{\rightarrow 0 + 1} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow y = a$$



ב.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} + a, \quad a > 0, \quad x^2 \geq 0, \quad 2 > 0 \Rightarrow x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow \forall x$$

14. א.

(1) ב.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2+2} + a \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} + a \right) = \frac{\rightarrow 1}{\rightarrow (1+0)} + a = a + 1 \Rightarrow y = a + 1$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + a = a \Rightarrow (0, a)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+2} + a = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + ax^2 + 2a}{x^2+2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+a) + 2a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-2a}{1+a} < 0 \Rightarrow \emptyset$$

(3)

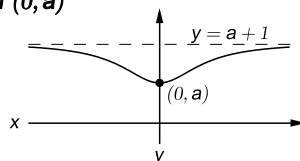
$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - 2x \cdot x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

x		0	
f'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f(0) = a \Rightarrow \min(0, a)$$

$$y_{\min} = a, \quad y_{\text{as.}} = a + 1$$

$a < a + 1 \Rightarrow$  מתחת לאסימפטוטה



א. (1)-(2)

10. (קיץ תש"ע - 2010, מועד א, המבחן הגנז) נתונה הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{a-x^2}$ ,  $a > 0$  פרמטר.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=0$  הוא 2. (273)

א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

ב. הצב את ערך  $a$  שמצאת, ומצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. העבירו שני ישרים המשיקים לגרף הפונקציה ומקבילים לציר  $x$ .

מצא את המרחק בין שני המשיקים.

11. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

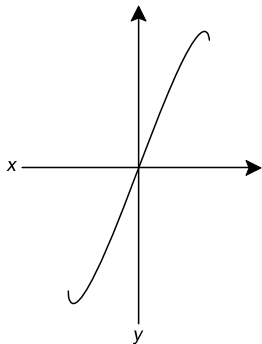
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר  $x$  של הפונקציה  $f(x)$ .

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ . (274)

ו. מצא עבור אילו ערכי  $k$ , הישר  $x=k$  אינו חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$ .



12. (004, חורף תשע"ג - 2013)

נתונה הפונקציה  $f(x) = 4x + x\sqrt{4-x^2}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. לפונקציה יש מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט כמתואר בציור.

מצא את השיעורים של נקודת המקסימום המוחלט

ושל נקודת המינימום המוחלט.

(275)

ג. נתון הישר  $y=k$ ,  $k > 0$ .

עבור אילו ערכים של  $k$ , הישר חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות?

תשובות

10. א.  $a=4$  ב.  $-2 \leq x \leq 2$  (1)  $(0,0)$ ,  $(\pm 2,0)$  (2)  $\min(-\sqrt{2}, -2)$ ,  $\max(\sqrt{2}, 2)$  (3)  $d=4$  (א')

11. א.  $(-4 \leq x < 0) \cup (x > 0)$  ב.  $(-4,0)$  ג.  $x=0$  ד.  $(-4 < x < 0) \cup (x > 0)$  ז.  $\emptyset$

ו.  $(k=0) \cup (k < -4)$

12. א.  $-2 \leq x \leq 2$  ב.  $\min_{ab}(-1.86, -8.81)$ ,  $\max_{ab}(1.86, 8.81)$  ג.  $8 \leq k < 8.81$

9. א.

$$f(x) = -3x\sqrt{x^2 - x}, \quad x^2 - x \geq 0, \quad x_{1,2} = 0, 1 \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \Rightarrow (x \leq 0) \cup (x \geq 1)$$

ב.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0), \quad y = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow (1, 0)$$

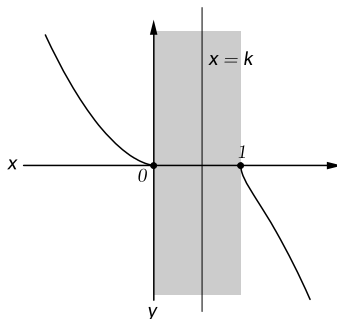
ג.

$$f'(x) = -3(1 \cdot \sqrt{x^2 - x} + x \cdot \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}) = -3 \cdot \frac{2x^2 - 2x + 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{-3(4x^2 - 3x)}{2\sqrt{x^2-x}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$x_1 = 0 \quad (\checkmark), \quad x_2 = \frac{3}{4} \quad (\times): \quad x = \frac{3}{4} \notin \{(x \leq 0) \cup (x \geq 1)\}$$

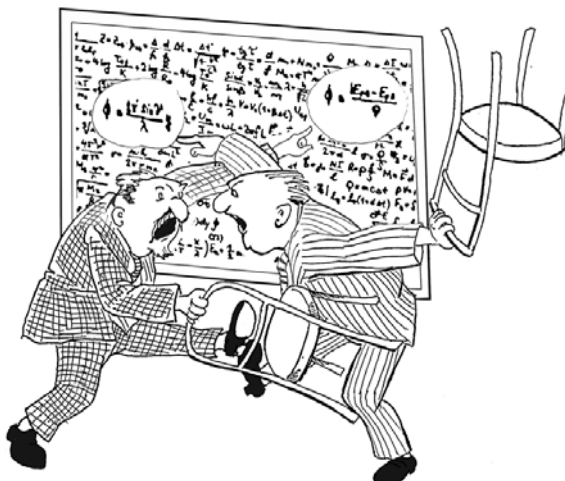
x		0		1	
y'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\emptyset$	0	$\frac{-}{+} = -$
y	$\searrow$	min <sub>ep.</sub>	$\emptyset$	max <sub>ep.</sub>	$\searrow$

ד.



ה. ישירות מהגרף

ומהגדרת הפונקציה:  $0 < k < 1$



### בעיה פיתגורית פתוחה

בהינתן שלִּשֶׁה פיתגורית  $x^2 + y^2 = z^2$  (x, y, z טבעיים).

ניתן למצוא מימדי תיבה  $a \times b \times h$ , כך שכל מימדיה מספרים טבעיים.

וגם כל אלכסוני פיאותיה טבעיים.

הנוסחאות הן אלו:  $a = x(4y^2 - z^2)$ ,  $b = y(4x^2 - z^2)$ ,  $h = 4xyz$ .

דוגמה:  $3^2 + 4^2 = 5^2$  (שלִּשֶׁה פיתגורית).  $x = 3$ ,  $y = 4$ ,  $z = 5$ .

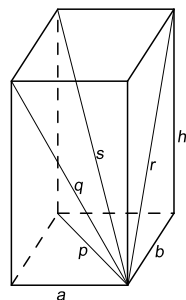
אזי:  $a = 3(4 \cdot 4^2 - 5^2) = 117$ ,  $b = 4(4 \cdot 3^2 - 5^2) = 44$ ,  $h = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 240$

מתקיים:

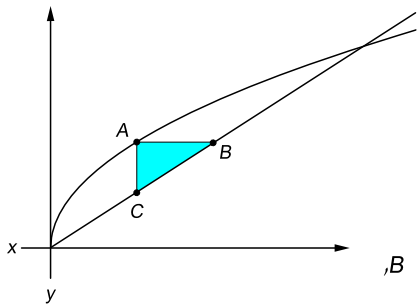
$$p = \sqrt{117^2 + 44^2} = 125, \quad q = \sqrt{117^2 + 240^2} = 267, \quad r = \sqrt{44^2 + 240^2} = 244 \quad (\checkmark)$$

השאלה הפתוחה (כלומר: שטרם יודעים את פתרונה) היא, האם ניתן למצוא a, b, c טבעיים, כך שגם אלכסון

התיבה (s) יהיה טבעי, בנוסף לאלכסוני הפאות.







17. (004, סתיו ס"ט - 2008, מועד לוחמים)

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{6}x \quad \text{בתחום } x \geq 0$$

מהנקודה A שעל גרף הפונקציה  $f(x)$

מעבירים ישר המקביל לציר x, וישר המאונך לציר x.

הישר המקביל חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה B,

והישר המאונך חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה C.

נתון כי שיעור x של הנקודה A הוא  $t^2$  ( $0 < t < 6$ ).

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודות B ו-C.

ב. הבע באמצעות t את שטח המשולש ABC.

ג. מצא עבור איזה ערך של t, שטח המשולש ABC הוא מקסימלי. (288)

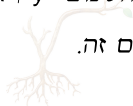
18. (803-003, קיץ תש"ע - 2010, מועד א, המבחן הגנוז)

א. מבין כל המספרים x ו-y החיוביים המקיימים  $xy = 75$ ,

מצא את שני המספרים שעבורם הסכום  $3x + y$  הוא מינימלי.

ב. מצא את הערך המינימלי של סכום זה.

(288)



19. (003, סתיו תשע"ב - 2011, לוחמים) אדם הזמין לביתו מרצפות.

כל מרצפת היא בצורת מלבן, אורכה 60cm ורוחבה 40cm.

המרצפת שהוזמנה מורכבת מחרסינה אפורה,

זכוכית לבנה בצורת מלבן במרכז וחרסינה לבנה בפינות

בצורת משולשים זהים שוויושוקיים שאורך השוק שלהם

הוא  $x$ cm ( $x > 0$ ).

א. (1) בטא את סך כל השטח הלבן שבמרצפת באמצעות x.

(2) מה צריך להיות הגודל של x כדי ששטח החרסינה האפורה

במרצפת יהיה מקסימלי?

(289)

ב. מהו השטח המקסימלי שיכול להיות לחרסינה האפורה במרצפת?



17. א.  $B(6t, t)$ ,  $C(t^2, \frac{t^2}{6})$  ב.  $S = \frac{1}{12}(6t - t^2)^2$  ג.  $t = 3$

18. א.  $x = 5$ ,  $y = 15$  ב.  $\min(3x + y) = 30$

19. א. (1)  $S = 6x^2 - 200x + 2400$  (סמך) (2)  $x = 16\frac{2}{3}$  cm ב.  $S = 1666\frac{2}{3}$  (סמך)

19. א. (1)

שטח ארבעת המשולשים  $4 \cdot \frac{x \cdot x}{2} = 2x^2$

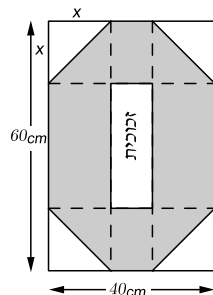
רוחב הזכוכית  $40 - 2x =$

אורך הזכוכית  $60 - 2x =$

שטח הזכוכית  $(40 - 2x)(60 - 2x) =$

$$= 2400 - 80x - 120x + 4x^2 = 4x^2 - 200x + 2400$$

$S = 2x^2 + 4x^2 - 200x + 2400 \Rightarrow S = 6x^2 - 200x + 2400$  (סמך)



(2)

$S = f(x) = 40 \cdot 60 - (6x^2 - 200x + 2400) = -6x^2 + 200x$

$f'(x) = -12x + 200 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 12x = 200 \Rightarrow x = 16\frac{2}{3}$

$f''(x) = (-12x + 200)' = -12 \Rightarrow f''(16\frac{2}{3}) = -12 < 0 \Rightarrow \max(\checkmark) \Rightarrow x = 16\frac{2}{3} \text{ cm}$

$S = f(16\frac{2}{3}) = -6 \cdot (16\frac{2}{3})^2 + 200 \cdot 16\frac{2}{3} \Rightarrow S = 1666\frac{2}{3}$  (סמך)



ב.

ניתן להציג כל מספר שלם (0, ±1, ±2, ...) על-ידי שימוש בשלוש פעמים המספר 2, ללא שימוש ב '-':

$$0 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$1 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}}}{\ln 2}, \quad -1 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$2 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$3 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

⋮

9. (חורף תשע"ב - 2012)

משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $(-1, 5)$  היא  $y = 12x + 17$ .  
 נגזרת הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:  $f'(x) = ax + 18$  (a פרמטר).  
**א.** חשב את ערך הפרמטר a.

הצב  $a = 6$  ב-  $f'(x)$ , וענה על הסעיפים ב-ג:

**ב.** חשב את שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.  
**ג.** מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

(297)

10. (חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

הנקודה  $B(-3, -16.5)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$ . נתון:  $f'(x) = ax^2 + 3x + 1$ .  
 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B הוא 10.  
**א.** מצא את הערך של a.

**ב.** הצב  $a = 2$ , וענה על תת-סעיפים (1)-(2).

**(1)** מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

(297)

**(2)** מצא את שיעור x של נקודה נוספת על גרף הפונקציה  $f(x)$ , שבה שיפוע המשיק הוא 10.

11. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = x^2 + x - k$  (k הוא פרמטר).  
 בנקודה שבה  $x = 2$  יש לפונקציה נקודת קיצון.

**א.** מצא את הערך של k.

**ב.** מצא את שיעור x של נקודת הקיצון הנוספת של הפונקציה, וקבע את סוגה.

**ג.** נתון כי ערך הפונקציה  $f(x)$  בנקודת המקסימום הוא 14.5.

(298)

**א.** מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

הביטוי  $991n^2 + 1$  נותן ריבוע שלם ראשון עבור  $n = 12, 055, 735, 790, 331, 359, 447, 442, 238, 767$ .

תהליך

9. **א.**  $a = 6$  **ב.**  $x_{\min} = -3$  **ג.**  $f(x) = 3x^2 + 18x + 20$

10. **א.**  $a = 2$  **ב.**  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 9$  **(1)** **ג.**  $x = 1\frac{1}{2}$  **(2)**

11. **א.**  $k = 6$  **ב.**  $x_{\max} = -3$  **ג.**  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

.6

$$f'(x) = ax^2 - 12, \quad f'(2) = 0, \quad f(0) = 4 \quad \text{נתון:}$$

$$f'(2) = a \cdot 2^2 - 12 = 0 \Rightarrow 4a - 12 = 0 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 12) dx = x^3 - 12x + c$$

$$f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0 + c = c = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f(x) = x^3 - 12x + 4$$

נתון

.7 א.

$$m = 1 \Rightarrow f'(1.5) = 1$$

$$f(x) = -x^2 + ax - 3 \Rightarrow f'(x) = -2x + a \Rightarrow f'(1.5) = -2 \cdot 1.5 + a = 1$$

$$-3 + a = 1 \quad / +3 \Rightarrow a = 4$$

ב.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f(1.5) = -1.5^2 + 4 \cdot 1.5 - 3 = -2.25 + 6 - 3 = 0.75 \Rightarrow A(1.5, 0.75)$$

$$m = 1, \quad A(1.5, 0.75) \Rightarrow y - 0.75 = 1 \cdot (x - 1.5) \quad / + 0.75 \Rightarrow y = x - \frac{3}{4}$$

ג.

$$m = -1, \quad A(1.5, 0.75) \Rightarrow y - 0.75 = (-1) \cdot (x - 1.5)$$

$$y - 0.75 = -x + 1.5 \quad / + 0.75 \Rightarrow y = -x + 2.25$$

.8 א.

$$f'(x) = -x^2 + 6x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow -x(x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 6$$

(1) ב.

$$f''(x) = -2x + 6 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x_{\min} = 0 \Rightarrow \min(0, 1)$$

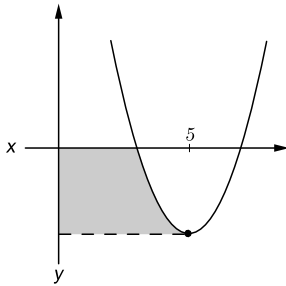
$$f(x) = \int (-x^2 + 6x) dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 + c, \quad (0, 1) \Rightarrow -0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 1$$

(2)

$$x_{\min} = 0 \Rightarrow x_{\max} = 6 \Rightarrow y_{\max} = -72 + 108 + 1 \Rightarrow y_{\max} = 37$$

5. (קיץ ס"ו - 2006 , מיוחד)



נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 10x + 21$

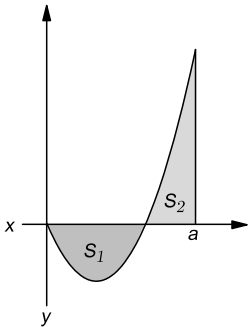
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר  $x$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על ידי המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 5$ ,

ועל ידי שני הצירים ( $x$  ו- $y$ ). (307)

6. (קיץ ס"ו - 2006 , לוהמים)



נתונה הפונקציה  $y = x^2 - 6x$  בתחום  $x \geq 0$

$S_1$  הוא השטח מתחת לציר  $x$  בין גרף הפונקציה לציר  $x$ .

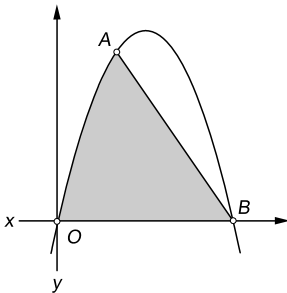
א. חשב את גודל השטח  $S_1$ .

ב.  $S_2$  הוא השטח מעל ציר  $x$  והישר  $x = a$

הבע באמצעות  $a$  את השטח  $S_2$ .

ג. נתון:  $S_1 = S_2$ . מצא את הערך של  $a$ . (308)

7. (קיץ ס"ז - 2007 , מועד א)



נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^2 + ax$

הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $A(2, 8)$

א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

ב. הפונקציה חותכת את ציר  $x$  בנקודה  $O(0, 0)$  ובנקודה  $B$ .

מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המיתר  $AB$  ועל ידי ציר  $x$ . (308)

המספר הראשוני ה-713 ניתן לרישום באופן הבא:

$$10^{1951} \times (10^{1975} + 199199199199199199199199199199) + 1$$

מספר זה התגלה כראשוני בשנת 1991 . . .

### שאלות

5. א.  $(7, 0)$   $(3, 0)$  ב.  $S = 14\frac{2}{3}$  (יחידות ריבועיות)

6. א.  $S_1 = 36$  (יחידות ריבועיות) ב.  $S_2 = \frac{a^3}{3} - 3a^2 + 36$  (יחידות ריבועיות) ג.  $a = 9$

7. א.  $a = 6$  ב.  $B(6, 0)$  ג.  $S = 25\frac{1}{3}$  (יחידות ריבועיות)

20. א.

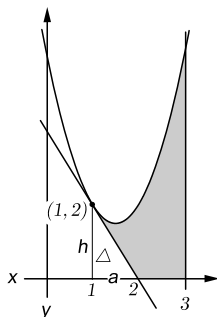
$$y = 2x^2 + 3ax + 6 \Rightarrow y' = 4x + 3a \Rightarrow y'(1) = 4 + 3a$$

$$m = -2 \Rightarrow 4 + 3a = -2 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2$$

$$a = -2 \Rightarrow y = 2x^2 - 6x + 6$$

$$\Rightarrow y(1) = 2 - 6 + 6 = 2 \Rightarrow (1, 2)$$

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$$



ב.

(1) ג.

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

(2)

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{(2-1) \cdot 2}{2} = 1$$

$$S = \int_1^3 (2x^2 - 6x + 6) dx - S_{\Delta} = \left( \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 6x \right) \Big|_1^3 - 1$$

$$S = (18 - 27 + 18) - \left( \frac{2}{3} - 3 + 6 \right) - 1 = 9 - 3\frac{2}{3} - 1 \Rightarrow S = 4\frac{1}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

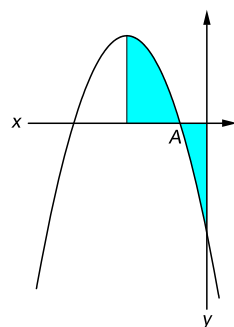
$$y = -x^2 - 6x + a, \quad x_{\max} = -\frac{-6}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_{\max} = -3$$

$$y_{\max} = y(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) + a = -9 + 18 + a$$

$$= 9 + a = 4 \quad / -9 \Rightarrow a = -5$$

$$y = -x^2 - 6x - 5$$

$$x_A: -x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = -5, \quad x_2 = -1$$



21. א. (1)

(2)

ב.

$$-1 > -5 \Rightarrow x_A = -1$$

$$S_1 = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 6x - 5) dx = \left( -\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x \right) \Big|_{-3}^{-1} \\ = \left( -\frac{-1}{3} - 3 + 5 \right) - \left( -\frac{-27}{3} - 27 + 15 \right) = \frac{1}{3} + 2 - 9 + 27 - 15 \Rightarrow S_1 = 5\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \left| \int_{-1}^0 (-x^2 - 6x - 5) dx \right| = \left| \left( -\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x \right) \Big|_{-1}^0 \right| = \left| 0 - \left( -\frac{-1}{3} - 3 + 5 \right) \right| = 2\frac{1}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = 5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} \Rightarrow S = 7\frac{2}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$